

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE TECHNIQUES AVANCÉES



Projet de Fin d'Études

effectué à

L'UNITÉ DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE L'ENSTA PARISTECH
du 29/06/2015 au 28/11/2015

par

Kirill Brodt
promotion 2015

Comparaison de méthodes numériques pour résoudre les équations de Maxwell avec une singularité

Rapport non confidentiel

encadré par

Patrick Ciarlet

2015

Résumé

On résout dans la première partie les équations stationnaires de Maxwell dans un domaine dite damier ou "checkerboard" borné de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$ avec une solution singulière. Pour prendre en compte la contrainte sur la divergence du champ, on utilise deux techniques, le multiplicateur de Lagrange et la pénalisation. La deuxième a été déjà examinée pour des champs réguliers et le choix du paramètre de régularisation $\alpha \lesssim h^2$. On étudie ici le cas des champs singulières et leur comportement avec les choix différents du paramètre de régularisation en utilisant des éléments finis d'arêtes. Les résultats numériques nous montrent que le choix $\alpha \lesssim h$ se révèle meilleur pour ces problèmes. Dans la deuxième partie on résout le problème électrique aux valeurs propres. Pour prendre en compte la même contrainte et pour supprimer les valeurs propres parasites on décompose l'espace $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ à deux espaces orthogonaux. On introduit un opérateur de projection dans un espace à divergence nulle et on modifie le problème en utilisant cet opérateur.

Mots-clés : Les équations de Maxwell, solution singulière, problèmes mixtes, pénalisation, éléments finis nodaux, éléments finis d'arêtes, valeurs propres, opérateur de projection

Remerciements

Je tiens à remercier dans un premier temps, toute l'équipe pédagogique de l'ENSTA ParisTech et les intervenants professionnels responsables de la formation, pour avoir assuré la partie théorique de celle-ci.

Je remercie toute l'équipe des relations internationales pour de m'avoir accueilli au sein de l'ENSTA, à savoir Madame Cécile Vigouroux qui s'est occupée avec la bourse pendant mes études à l'ENSTA et aussi pour bureaucratie de mon séjour en France.

Je remercie Madame Chen Corine qui s'est occupée avec la bourse de stage, qui m'a permis de poursuivre mon stage dans les meilleures conditions.

Je remercie également Monsieur Patrick Ciarlet pour l'aide et les conseils concernant les missions évoquées dans ce rapport, qu'il m'a apporté lors des différents suivis.

Je remercie Mademoiselle Marina Osintseva pour me soutenir moralement pendant tout mon stage.

Finalement, je remercie toute ma famille pour qu'elle me donne la vie dans ce monde exquise et étonnant. Merci.

Table des matières

1	Equations de Maxwell en deux dimensions avec une solution singulière	1
1.1	Equation pour le potentiel	1
1.2	Passage aux équations stationnaires de Maxwell	3
1.2.1	Multiplicateur de Lagrange	4
1.2.2	Pénalisation	5
1.3	Comparaison	8
1.4	Adaptation de maillage	10
1.4.1	Potentiel	10
1.4.2	Multiplicateur de Lagrange	11
1.4.3	Pénalisation	12
1.4.4	Comparaison	14
1.5	Résumé	15
2	Equations de Maxwell en trois dimensions avec une solution singulière	16
2.1	Equations de Maxwell	16
2.1.1	Multiplicateur de Lagrange	16
2.1.2	Pénalisation	17
2.2	Comparaison	22
2.3	Résumé	24
3	Problème aux valeurs propres des équations de Maxwell	25
3.1	Problème électrique aux valeurs propres	25
3.2	Décomposition orthogonale de l'espace $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$	26
3.3	Discrétisation et la forme matricielle d'opérateur de projection	26
3.4	Tests numériques	29
3.5	Résumé	30
	Bibliographie	32

Introduction

Cette monographie est en partie la suite du sujet de Projet de Recherche [1], [2] et elle est consacré à la résolution numérique des équations de Maxwell dont la solution est singulière en utilisant la méthode des éléments finis d'arêtes.

Dans le premier chapitre on commence par la résolution d'équation elliptique du seconde ordre en deux dimensions avec un coefficient discontinu dans une géométrie dite damier ou "checkerboard" pour le potentiel qui est singulier. C'est-à-dire, il appartient à l'espace de Sobolev $H^{1+\lambda}(\Omega)$ avec $\lambda \in]0, 1/2[$. On va discrétiser ce problème par des éléments finis nodaux de type Lagrange P_k d'ordre k . Dans ce cas la vitesse de convergence ne dépend pas d'ordre des éléments finis P_k est égale à λ en norme H^1 [3, théorème 3.16] et 2λ en norme L^2 . On passe ensuite, grâce au potentiel, aux équations stationnaires de Maxwell dont la solution est aussi singulière. La difficulté de ces équations est d'approcher numériquement un champ qui vérifie la loi de Gauss. Il existe nombreuses techniques pour prendre en compte cette contrainte, cependant on examinera ici les deux, à savoir la méthode classique d'un point selle, consistant en l'introduction du multiplicateur de Lagrange [4, chapitre 2] et la méthode de pénalisation développée par P. Ciarlet, H. Wu et J. Zou dans l'article [5], où il n'y a aucun besoin de point selle et qui permet de calculer plus rapidement et plus efficacement les champs électromagnétiques par rapport à la première. Les auteurs ont examiné un problème avec $\lambda > 1/2$ et un choix du paramètre de régularisation $\alpha = h_{min}^2$, par contre, dans cette monographie on variera ce paramètre et on obtiendra numériquement que le choix $\alpha = h_{min}$ se révèle meilleur. Ensuite on étudiera la convergence sur des maillages uniformes et on obtient l'ordre de convergence λ pour les approximations d'ordre 1 et 2. On va également l'étudier sur des maillages adaptés et on va les comparer.

Dans le deuxième chapitre on refera toute la démarche de premier chapitre, mais en trois dimensions. La seule différence sera la présence de charges dans le domaine, qui entraîne certaines modifications dans la technique de pénalisation, consistant en deux étapes. La première est de résoudre un problème scalaire et la deuxième est de résoudre un problème vectorielle mais sans point selle.

Dans le troisième chapitre on examinera le problème aux valeurs propres des équations de Maxwell pour le champ électrique. La difficulté est encore en fois la prise en compte de la loi de Gauss. On proposera de faire une projection sur un espace à divergence nulle où on n'a pas besoin de prendre en compte la contrainte et, de plus, cette projection nous permettra d'éviter des valeurs propres nulles associés aux gradients (champs à rotationnel nul).

Chapitre 1

Equations de Maxwell en deux dimensions avec une solution singulière

1.1 Equation pour le potentiel

Soit Ω un domaine convexe borné de \mathbb{R}^2 à frontière "suffisamment régulière". On s'intéresse à résoudre l'équation scalaire elliptique du second ordre avec un coefficient discontinu dont la solution est singulière, c'est-à-dire elle appartient à l'espace de Sobolev $H^{1+\lambda}(\Omega)$ avec $\lambda \in]0, 1/2[$. Dans ce cas la convergence de la méthode des éléments finis de type Lagrange P_k a la vitesse 2λ en norme $L^2(\Omega)$ et λ en norme $H^1(\Omega)$ et ne dépend pas d'ordre des éléments finis P_k quel que soit k . L'objectif de cette section est d'abord trouver la solution singulière exacte et puis réaliser des expériences numériques et étudier la convergence.

Mettons-nous en quête de la solution singulière exacte de notre système. On considère l'équation suivante $-\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0$ pour le potentiel $\phi \in H^1(\Omega)$ dans le domaine carré $\Omega =]-a, a[^2$ de \mathbb{R}^2 avec $a > 0$, divisé en quatre sous-carrés Ω_i , où σ est une fonction constante par morceaux. On note $\sigma_i = \sigma|_{\Omega_i}$. Soit $\sigma_i = D > 1$ dans $\Omega_1 \cup \Omega_3$ et $\sigma_i = 1$ dans $\Omega_2 \cup \Omega_4$. On va chercher la solution ϕ_{sing} en coordonnées polaires sous la forme

$$\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (c \cos \lambda \theta + s \sin \lambda \theta),$$

où λ est paramètre réel et c et s sont des fonctions constants par morceaux dépendant de D . La restriction $\phi_i = \phi_{sing}|_{\Omega_i}$ est dans $H^1(\Omega_i)$ et vérifie évidemment l'équation $-\operatorname{div}(\sigma_i \nabla \phi_i) = -\sigma_i \Delta \phi_i = 0$ dans Ω_i . Pour que la fonction ϕ_{sing} appartienne à $H^1(\Omega)$ et vérifie $\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi_{sing}) = 0$ dans tout Ω , il suffit que le saut $[\phi_{sing}]_\Gamma$ et le saut normal $[\sigma \frac{\partial \phi_{sing}}{\partial n}]_\Gamma$ soient égaux à 0 à la traversée de l'interface $\Gamma = \bigcap_i \overline{\Omega}_i$, où \mathbf{n} est le vecteur unitaire à $\partial\Omega$ dirigé à l'extérieur. En outre, pour simplifier les calculs des fonctions c et s , nous supposons que la solution est antisymétrique par rapport de l'axe $\theta = \pi/4$ et symétrique par rapport de l'axe $\theta = -\pi/4$. D'après le théorème 1.2.18 du livre de Grisvard [6, p. 7] la fonction ϕ_{sing} obtenue appartient à l'espace $H^{1+\lambda}(\Omega)$ avec $\lambda \in]0, 1/2[$.

On s'intéresse maintenant à résoudre le problème suivant pour le potentiel scalaire ϕ

$$(\mathcal{P}_{sing}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (\Omega), \\ \phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega), \end{array} \right.$$

avec la solution unique ϕ_{sing} . On passe à la formulation variationnelle équivalente

$$(\mathcal{P}_{sing,V}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in V \text{ telle que} \\ a(\phi, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in V^0, \\ \phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega), \end{array} \right.$$

où les espaces $V = H^1(\Omega)$, $V^0 = H_0^1(\Omega)$ et la forme bilinéaire $a(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \psi$. Ce problème est bien posé grâce au théorème de Lax-Milgram, puisque la forme a est continue et coercive sur V [7].

On passe maintenant à la discrétisation du problème $(\mathcal{P}_{sing,V})$. Soit \mathcal{T}_h une triangulation régulière du domaine Ω , telle que $\overline{\Omega} = \bigcup_i K_i$, $K_i \in \mathcal{T}_h$. On note h_i le diamètre d'un triangle K_i et $h = h_{max} = \max_i h_i$ et $h_{min} = \min_i h_i$. Introduisons un sous-espace $V_h \subset V$ de dimension fini, $\dim V_h = N < \infty$. On reformule le problème variationnel dans l'espace discret V_h

$$(\mathcal{P}_{sing,V}^h) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_h \in V_h \text{ telle que} \\ a(\phi_h, \psi_h) = 0 \quad \forall \psi_h \in V_h^0, \\ \phi_h = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega), \end{array} \right.$$

où $V_h^0 = V_h \cap H_0^1(\Omega)$. Lorsque l'espace V_h est fermé dans V , la forme a reste continue et coercive sur V_h et le problème discret est donc bien posé [7, p. 50].

Pour ce problème on va utiliser des éléments finis nodaux de type Lagrange P_k avec $k = 1, 2$. Dans ce cas, lorsque la solution ϕ appartient à $H^{1+\lambda}(\Omega)$ avec $\lambda \in]0, 1/2[$ on a les estimations suivantes $\|\phi - \phi_h\|_{H^1(\Omega)} \lesssim h^\lambda$ et $\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^{2\lambda}$ quel que soit l'ordre des éléments finis P_k . On peut trouver ces résultats, par exemple, dans [3, p. 120].

Les cas-tests sont implémentés avec le paramètre λ égal à 0.45 ou 0.15 et les fonctions c et s sont choisis comme

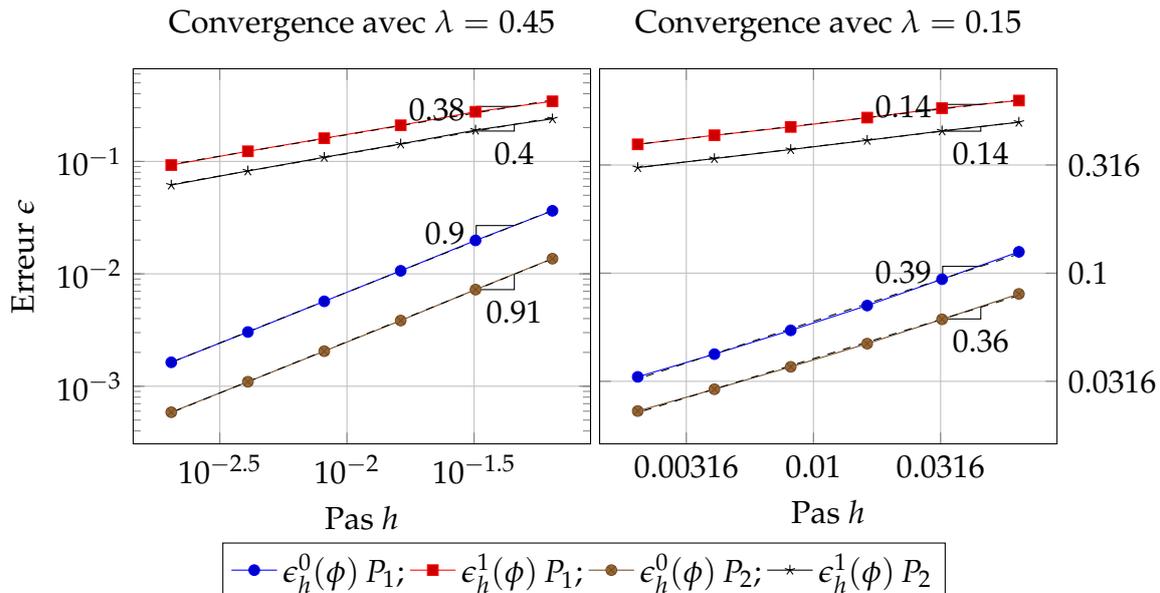
	$\lambda = 0.45 (D = 7.3475)$				$\lambda = 0.15 (D = 71.385)$				
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	
c_i	0.7071	-0.3683	1.7825	0.7071	c_i	0.7071	-0.668	2.0822	0.7071
s_i	-1.9167	-0.6576	0.9982	-0.2609	s_i	-5.9743	-0.24645	5.6441	-0.0837

pour assurer les conditions de continuité sur ϕ et son flux normal.

Nous allons étudier la convergence de la solution discrète ϕ_h vers la solution exacte ϕ sur les maillages uniformes. On va varier le pas h du maillage et calculer les erreurs relatives $\epsilon_h^0(\phi) = \frac{\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}}$ et $\epsilon_h^1(\phi) = \frac{\|\phi - \phi_h\|_{H^1(\Omega)}}{\|\phi\|_{H^1(\Omega)}}$. Nous représentons sur la figure ci-dessous les évolutions des erreurs relatives en fonctions du pas h en échelle logarithmique avec les éléments finis P_1 et P_2 . Ici et dans la suite les cas-tests sont implémentés à l'aide de logiciel FreeFem++[8]².

1. plus précisément $h \sim (N_T)^{-1/2}$, où N_T est le nombre des triangles du maillage.

2. Tous les calculs sont faits sur l'ordinateur : Core i5-4200U CPU @ 1.6GHz et 6 Go de RAM en utilisant le solveur direct de bibliothèque UMFPAK.



D'abord on remarque que l'ordre de convergence ne dépend pas de l'ordre des éléments finis. Il en est de même de l'ordre de l'erreur. On voit bien que l'ordre de convergence avec $\lambda = 0.45$ est $2\lambda = 0.9$ en norme L^2 et un peu moins que λ en norme H^1 . Par contre, pour $\lambda = 0.15$ l'ordre de convergence est un peu plus $2\lambda = 0.3$ en norme L^2 et λ en norme H^1 , ce qui est tout à fait compatible avec la théorie.

1.2 Passage aux équations stationnaires de Maxwell

A partir du potentiel ϕ , on peut passer aux équations stationnaires de Maxwell en deux dimensions, à savoir on prend $E = \sigma \mathbf{rot} \phi$ et on a immédiatement $\mathbf{rot} E = 0$, car $\mathbf{rot} \sigma \mathbf{rot} \phi = -\mathbf{div} \sigma \nabla \phi = 0$ et donc $\mathbf{rot} \mathbf{rot} E = 0$ dans Ω . De plus $\mathbf{div} \sigma^{-1} E = 0$ dans Ω . Dans ce cas le champ E appartient à l'espace $\mathbf{H}^\lambda(\Omega)$. Les équations stationnaires de Maxwell s'écrivent donc de façon suivantes

$$(\mathcal{E}_{sing}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{rot} E = 0 \quad (\Omega), \\ \mathbf{div} \sigma^{-1} E = 0 \quad (\Omega), \\ E \cdot \boldsymbol{\tau} = g \quad (\partial\Omega), \end{array} \right.$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est un vecteur tangent à $\partial\Omega$ et tel que $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\tau})$ forme une base orthonormale et la source g est calculée à partir de la solution exacte E .

La difficulté de modélisation numérique des équations de Maxwell est d'approcher le champ E qui vérifie loi de Gausse, autrement dit d'avoir $\mathbf{div} \sigma^{-1} E_h = \rho$. Il existe nombreuses méthodes de prendre en compte cette contrainte, cependant dans cette section on va examiner les deux, la méthode classique d'un point selle, consistant en l'introduction du multiplicateur de Lagrange [4, chapitre 2] et la méthode apparue récemment de pénalisation, où il n'y a aucun besoin de point selle et qui permet de calculer plus rapidement et plus efficacement les champs électromagnétiques par rapport à la première [5].

1.2.1 Multiplicateur de Lagrange

On commence par le multiplicateur de Lagrange. Cette méthode consiste en l'introduction du multiplicateur artificiel $\sigma^{-1}\nabla p$ dans la première équation du système (\mathcal{E}_{sing}) pour aboutir à

$$(\mathcal{E}\mathcal{M}_{sing}) \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} + \sigma^{-1} \nabla p = 0 \quad (\Omega), \\ \operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega), \\ \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = g \quad (\partial\Omega). \end{array} \right.$$

On se place maintenant dans l'espace du champ électrique $\mathbf{X} = \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ et on passe à la formulation variationnelle dite *mixte*, avec des fonctions-test dans $\mathbf{X}^0 = \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ et dans $\mathbf{V}^0 = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ pour le multiplicateur

$$(\mathcal{E}\mathcal{M}_{sing,V}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E}, p) \in \mathbf{X} \times \mathbf{V}^0 \text{ telle que} \\ a(\mathbf{E}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}^0, \\ b(\mathbf{E}, q) = 0 \quad \forall q \in \mathbf{V}^0, \\ \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = g \quad (\partial\Omega), \end{array} \right.$$

où les formes bilinéaires $a(\mathbf{E}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ et $b(\mathbf{v}, p) = \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{v} \cdot \nabla p$. Grâce à la séquence exacte $q \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, alors $\nabla q \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega)$, on prend la fonction-test $\mathbf{v} = \nabla p$ dans la première égalité de $(\mathcal{E}\mathcal{M}_{sing,V})$ et on arrive à $\int_{\Omega} \sigma^{-1} |\nabla p|^2 = 0$. Sachant que $\sigma^{-1} \geq \sigma_{min}^{-1} > 0$ presque partout, on en conclut que $\nabla p = 0$, et le multiplicateur est constant dans Ω . S'annulant sur la frontière $\partial\Omega$, il est nul. Nous avons montré que si \mathbf{E} est solution de (\mathcal{E}_{sing}) , alors $(\mathbf{E}, 0)$ résolve le problème mixte $(\mathcal{E}\mathcal{M}_{sing,V})$. La réciproque est également vérifiée, car la forme a est coersive sur le noyau et la forme b vérifie la *condition inf-sup*. Donc le problème mixte est bien posé [4, théorème 2.1].

On discrétise maintenant le problème $(\mathcal{E}\mathcal{M}_{sing,V})$. Considérons deux sous-espaces $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{X}$ et $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ de dimensions finis et on introduit le problème mixte approché associé à $(\mathcal{E}\mathcal{M}_{sing,V}^h)$

$$(\mathcal{E}\mathcal{M}_{sing,V}^h) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{V}_h^0 \text{ telle que} \\ a(\mathbf{E}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0, \\ b(\mathbf{E}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in \mathbf{V}_h^0, \\ \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = g \quad (\partial\Omega), \end{array} \right.$$

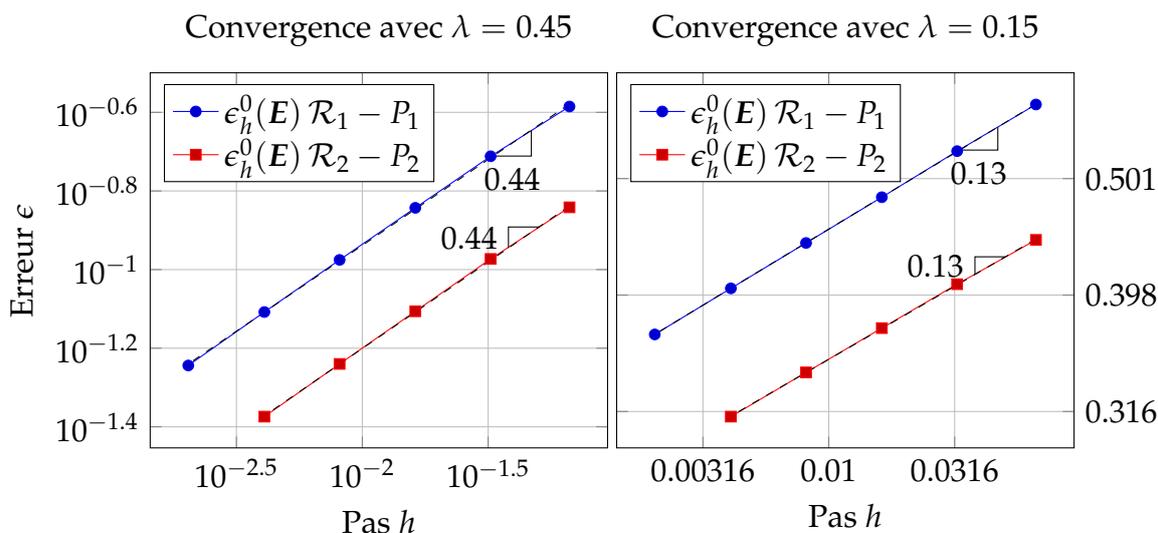
où $\mathbf{X}_h^0 = \mathbf{X}_h \cap \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega)$.

On va prendre comme les espaces \mathbf{X}_h et \mathbf{X}_h^0 des éléments finis d'arêtes de type Raviart-Thomas \mathcal{R}_k [4, p. 109] et comme \mathbf{V}_h^0 des éléments finis nodaux de type Lagrange P_k , avec $k = 1, 2$. L'espace \mathbf{X}_h ont la propriété fondamentale d'être à composantes tangentielles localisées sur les frontières des éléments géométriques. Il est ainsi capable de forcer implicitement les conditions de continuité tangentielle du champ électrique \mathbf{E} à la traversée des interfaces. Plus précisément, les moments $M_e(\mathbf{v}) = \int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$ jouent de rôle des degrés de liberté, où e est une arête d'un triangle K et \mathbf{t} vecteur unitaire dans la direction de e . Donc chaque fonction \mathbf{v} est définie par ces moments uniquement qui représentent rien d'autre qu'une valeur composante tangente dans la direction d'arête. Pour prendre en compte la condition aux limites on force ces degrés de liberté à g .

Comme on a préservé la propriété de séquence exacte au niveau discret, on peut utiliser $\mathbf{v}_h = \nabla p_h$ comme la fonction-test et en conclure que $p_h = 0$ dans Ω . Sous quelques

conditions supplémentaires comme *condition inf-sup discrète uniforme*, on peut établir que le problème discrète $(\mathcal{E} \mathcal{M}_{sing,V}^h)$ est bien posé [4, théorème 2.12].

Nous allons étudier la convergence de la solution discrète E_h vers la solution exacte E sur les maillages uniformes. On va varier le pas h du maillage et on calcule l'erreur relative $\epsilon_h^0(E) = \frac{\|E - E_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|E\|_{L^2(\Omega)}}$. Nous représentons sur la figure ci-dessous les évolutions des erreurs relatives en fonctions du pas h en échelle logarithmique avec les éléments finis $\mathcal{R}_k - P_k$ avec $k = 1, 2$. Avec notre choix de E on a forcément $\text{rot } E = 0$ et la norme du $\text{rot } E_h$ en L^2 est toujours d'ordre $< 10^{-10}$ et cela est aussi vrai pour le multiplicateur de Lagrange p_h et nous n'affichons donc pas les erreurs de ceux-ci.



Et encore un fois on remarque que l'ordre de convergence ne dépend pas de l'ordre des éléments finis. Il en est de même pour l'ordre de l'erreur. On voit bien que le pente coïncide avec λ dans le premier cas et un peu moins λ dans le deuxième. Cependant l'erreur est trop grande (d'ordre $10^{-0.4} \approx 0.4$) pour $\lambda = 0.15$!

1.2.2 Pénalisation

On voit maintenant la deuxième méthode de la pénalisation proposée dans l'article [5]. L'idée est simple et consiste à annuler la divergence discrète de $\sigma^{-1}E_h$. Plus précisément, on passe à la formulation variationnelle discrète de (\mathcal{E}_{sing}) avec certaine modification

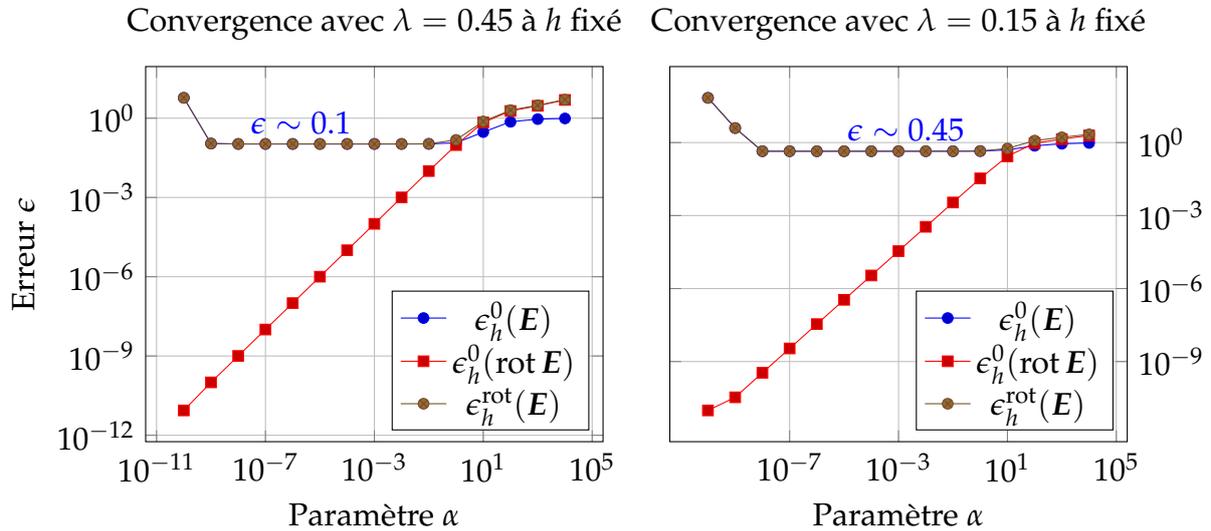
$$(\mathcal{E} \mathcal{P}_{sing,V}^h) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } E_h \in \mathbf{X}_h \text{ tel que} \\ a_\alpha(E_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in \mathbf{X}_h^0, \\ E_h \cdot \boldsymbol{\tau} = g \quad (\partial\Omega), \end{array} \right.$$

où la forme bilinéaire $a_\alpha(E, v) = \int_\Omega \text{rot } E \text{ rot } v + \alpha(h) \int_\Omega \sigma^{-1} E \cdot v$ et le paramètre $\alpha(h) > 0$. Dans l'article les auteurs ont obtenu une condition pour α telle que la perturbation ajoutée n'influence pas à l'ordre de convergence du champ E_h . Malgré du choix des auteurs de paramètre $\alpha \lesssim h^2$, on va ici choisir $\alpha \lesssim h^\lambda$ ce qui n'ajoute aussi pas des erreurs à l'approximation E_h .

Comme d'habitude, on choisit comme espace discrète \mathbf{X}_h des éléments finis d'arêtes de type Thomas-Raviart \mathcal{R}_k , avec $k = 1, 2$. Le problème $(\mathcal{E} \mathcal{P}_{sing,V}^h)$ est bien posé, lorsque a_α est coercive dans \mathbf{X}_h .

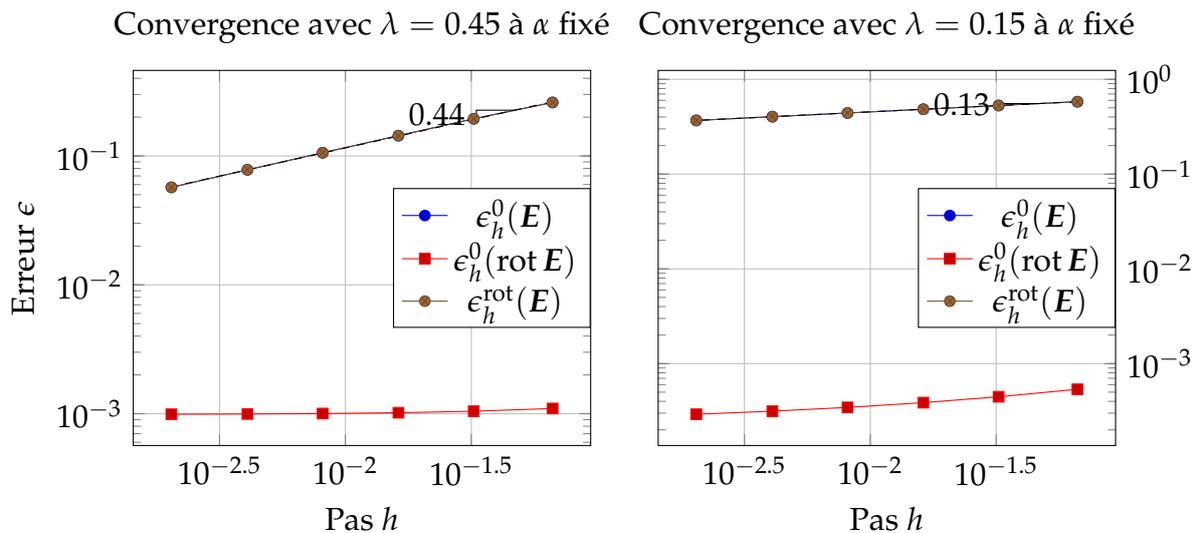
Ci-dessous on va étudier trois cas : on varie α à h fixé, on varie h à α fixé et, finalement, on varie les deux h et α .

à h fixé Commençons par le premier cas. D'abord on fixe le pas h du maillage et on va varier le paramètre α et calculer les erreurs relatives $\epsilon_h^0(E)$, $\epsilon_h^0(\text{rot } E)$ et $\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$. Nous représentons sur la figure ci-dessous les évolutions des erreurs relatives en fonctions du paramètre α en échelle logarithmique pour $h = 0.008$ avec l'approximation \mathcal{R}_1 .



On remarque que $\epsilon_h^0(\text{rot } E)$ dépend linéairement du paramètre α en échelle logarithmique. Pour cette raison on peut jouer avec le paramètre α de manière à ce que l'erreur du rotationnel du champ E_h soit petite et n'influence pas la norme complète. On voit encore que $\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$ et $\epsilon_h^0(E)$ restent pareils pour $\alpha \leq 10^{-1}$.

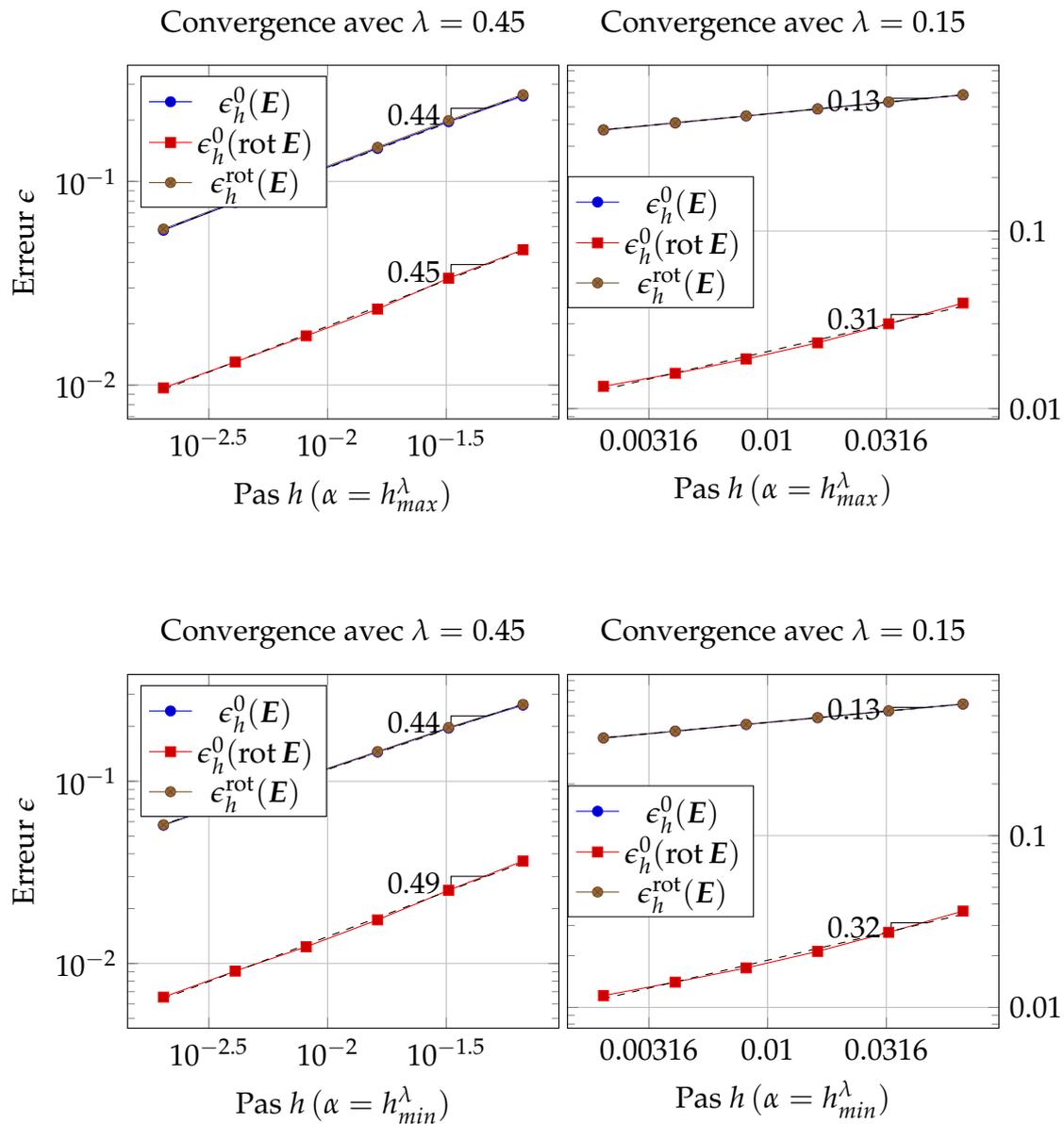
à α fixé On fixe maintenant le paramètre α et on va varier le pas h du maillage et calculer les erreurs relatives. Nous représentons sur la figure ci-dessous les évolutions des erreurs relatives en fonctions du pas h en échelle logarithmique pour $\alpha = 10^{-2}$ avec l'approximation \mathcal{R}_1 .



Même si la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)}$ de l'erreur diminue, on voit ici que la norme $\|\text{rot } E_h\|_{L^2(\Omega)}$ ne varie pas et cela pourra donc poser les problèmes lorsque le pas h devient plus petit.

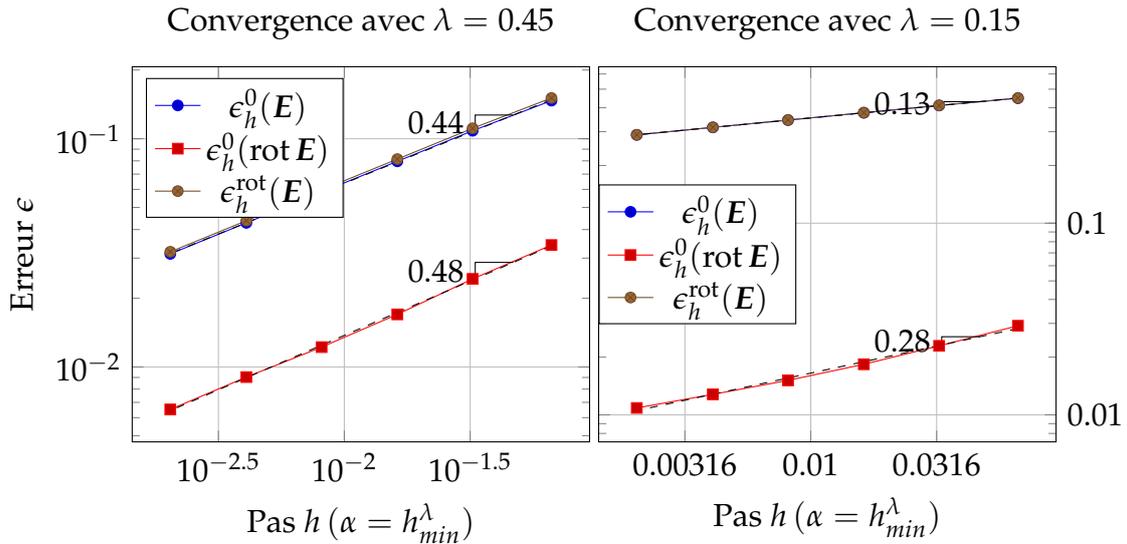
3. où $\epsilon_h^{\text{rot}}(E) = \frac{\|E - E_h\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)}}{\|E\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)}}$ l'erreur relative complète dans $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ et $\epsilon_h^0(\text{rot } E) = \frac{\|\text{rot } E_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|E\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)}}$.

$\alpha = \alpha(h)$ On est finalement dans le troisième cas. On va maintenant choisir le paramètre α qui vérifie une condition du type $\alpha \lesssim h^\lambda$, par exemple, le premier choix est $\alpha = h_{max}^\lambda = h^\lambda$ et le deuxième est $\alpha = h_{min}^\lambda$. Nous représentons sur la figure ci-dessous les évolutions des erreurs relatives en fonctions du pas h en échelle logarithmique avec les éléments finis \mathcal{R}_1 .



Comme on a vu dans le premier cas $\epsilon_h^0(\text{rot } E)$ dépend linéairement du paramètre α en échelle logarithmique. Avec notre choix du paramètre $\alpha = h^\lambda$ on constate que la pente de la convergence du rotationnel de E_h est égale à λ lorsque $\lambda = 0.45$. Par contre, pour $\lambda = 0.15$ on voit que la pente est 2λ et ce reste la question ouverte. Pour améliorer l'erreur on choisit comme paramètre $\alpha = h_{min}^\lambda$.

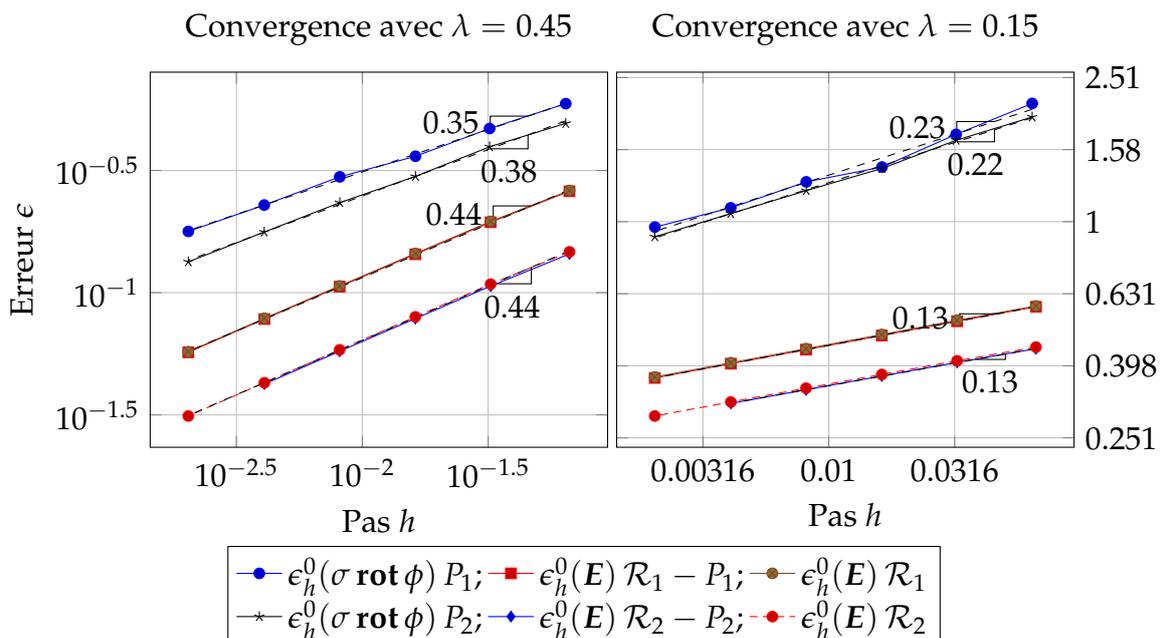
On va regarder maintenant qu'est-ce-que passera avec l'approximation \mathcal{R}_2



L'erreur $\epsilon_h^0(\text{rot } E)$ reste identique que avec l'approximation \mathcal{R}_1 et ne dépend pas d'ordre de l'approximation. Bien que l'ordre de convergence soit λ cela posera des problèmes lorsque l'ordre de l'approximation k devient plus grand. Il s'en suit que le paramètre α doit en dépendre. Néanmoins on prend $\alpha = h_{min}^\lambda$ pour les deux approximations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 , car cela ne contribue pas significativement à l'erreur $\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$ en deux dimensions (ce qui n'est pas vrai en trois dimensions !).

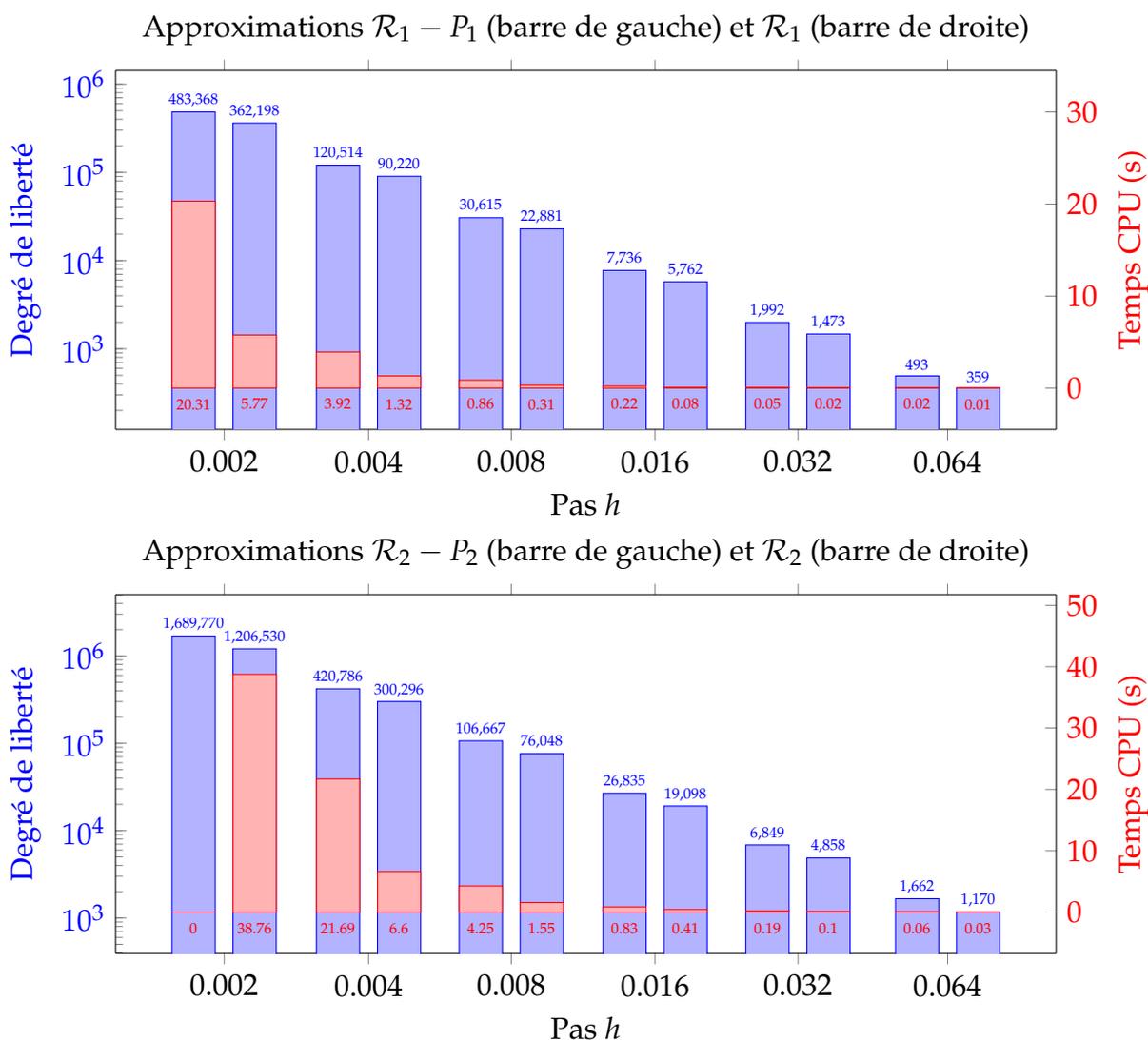
1.3 Comparaison

Maintenant on a tous pour comparer les différentes méthodes. Nous rassemblons sur une figure (ci-dessous) les convergences des erreurs relatives pour le champ E en norme L^2 de toutes les méthodes, car les erreurs sur le rotationnel du champ sont suffisamment petites par rapport les aux autres pour ne pas contribuer aux erreurs totales.



On remarque que le champ obtenu par le potentiel ($E_h = \sigma \text{rot } \phi_h$) a l'erreur relative la plus grande. Les champs obtenus par l'introduction du multiplicateur de Lagrange et

par la méthode de la pénalisation avec le choix du paramètre $\alpha = h_{min}^\lambda$ ont d'erreurs relatives identiques, par contre avec l'approximation \mathcal{R}_2 on peut aller plus loin avec la pénalisation que avec le multiplicateur, et l'avantage de la pénalisation ne se réduit pas à cela ! On gagne encore en stockage et en temps du calcul. Ci-dessous nous représentons le stockage (degré de liberté de l'approximation) et le temps du calcul en secondes (ici on a le temps d'assemblage des matrices plus le temps de résolution du système linéaire)⁴.



On voit bien que les tailles du problème sont comparables avec le multiplicateur et sans lui, par contre les temps sont très différents. La pénalisation est jusqu'à trois fois plus rapide, quand la taille augmente et sans la perte de précision !

Pour chaque approximation on représente ci-dessous les tableaux avec le nombre de degrés de liberté (DOF), éléments non-nuls de la matrice (NNZ), l'erreur relative $\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$ pour $\lambda = 0.45$ et le temps de résolution de système linéaires (CPU). Chaque ligne correspond au même pas h .

4. en pratique le temps d'assemblage est beaucoup plus que le temps de résolution.

$\mathcal{R}_1 - P_1$				\mathcal{R}_1			
DOF	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(\mathbf{E})$	CPU	DOF	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(\mathbf{E})$	CPU
493	5,359	2.60 ₋₁	0.014	359	1,715	2.64 ₋₁	0
1,993	22,309	1.94 ₋₁	0.001	1,474	7,210	1.97 ₋₁	0
7,741	87,811	1.44 ₋₁	0.006	5,765	28,505	1.46 ₋₁	0.002
30,633	349,869	1.06 ₋₁	0.033	22,894	113,830	1.07 ₋₁	0.007
120,585	1,381,917	7.80 ₋₂	0.158	90,278	450,110	7.90 ₋₂	0.038
483,725	5,553,227	5.70 ₋₂	0.888	362,473	1,809,805	5.77 ₋₂	0.142
$\frac{nnz}{dof} \approx 11.5 \quad \frac{dof(\mathcal{R}_1 - P_1)}{dof(\mathcal{R}_1)} \approx 1.33$				$\frac{nnz}{dof} \approx 5$			

$\mathcal{R}_2 - P_2$				\mathcal{R}_2			
DOF	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(\mathbf{E})$	CPU	DOF	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(\mathbf{E})$	CPU
1,663	36,415	1.44 ₋₁	0.002	1,170	13,188	1.51 ₋₁	0.001
6,853	152,965	1.06 ₋₁	0.009	4,860	55,608	1.11 ₋₁	0.002
26,851	604,531	7.84 ₋₂	0.042	19,110	220,140	8.14 ₋₂	0.007
106,733	2,413,645	5.75 ₋₂	0.212	76,100	879,688	5.96 ₋₂	0.026
421,085	9,543,229	4.23 ₋₂	0.993	300,500	3,479,656	4.38 ₋₂	0.123
1,691,115	38,369,659	-1.00 ₀	-1	1,207,390	13,993,436	3.20 ₋₂	0.53
$\frac{nnz}{dof} \approx 22.5 \quad \frac{dof(\mathcal{R}_2 - P_2)}{dof(\mathcal{R}_2)} \approx 1.4$				$\frac{nnz}{dof} \approx 11.5$			

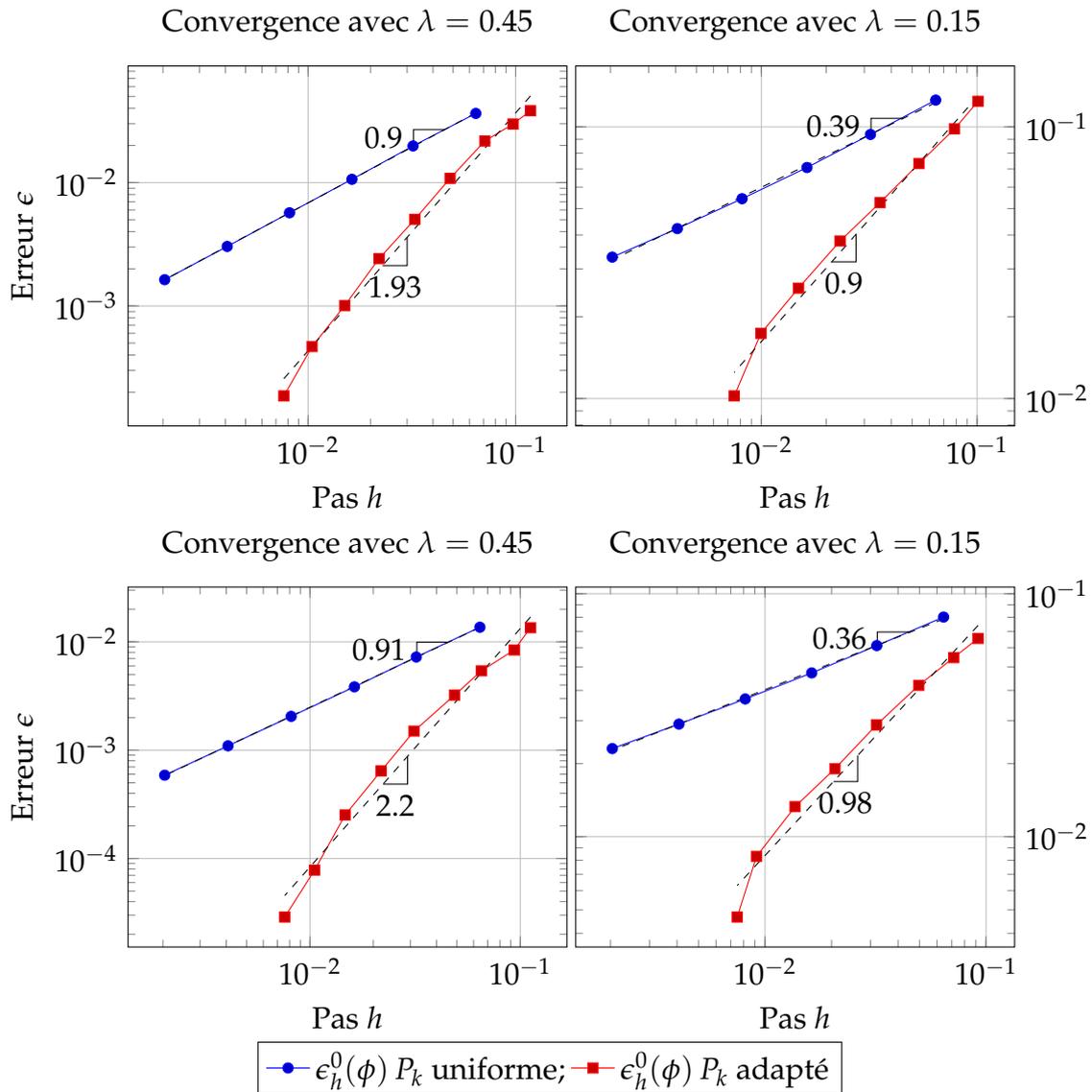
D'après ces tableaux on voit que l'on obtient les erreurs identiques avec même pas h en utilisant ces deux méthodes, cependant la pénalisation consume plus moins des ressources calculatoires.

1.4 Adaptation de maillage

Dans cette section on va étudier la convergence dans le cas du maillage adapté a posteriori. On va utiliser la stratégie classique d'adaptation de maillage [7, p. 91]. On fixe d'abord le maillage \mathcal{T}_h^0 uniforme avec un certain pas h . Pour $n > 0$, chaque maillage \mathcal{T}_h^n sera obtenu à partir du maillage \mathcal{T}_h^{n-1} à l'aide d'adaptation de la solution obtenue sur le maillage \mathcal{T}_h^{n-1} pour $n > 0$. Ci-dessous nous comparons le cas d'adaptation du maillage avec les maillages uniformes que nous avons utilisés précédemment.

1.4.1 Potentiel

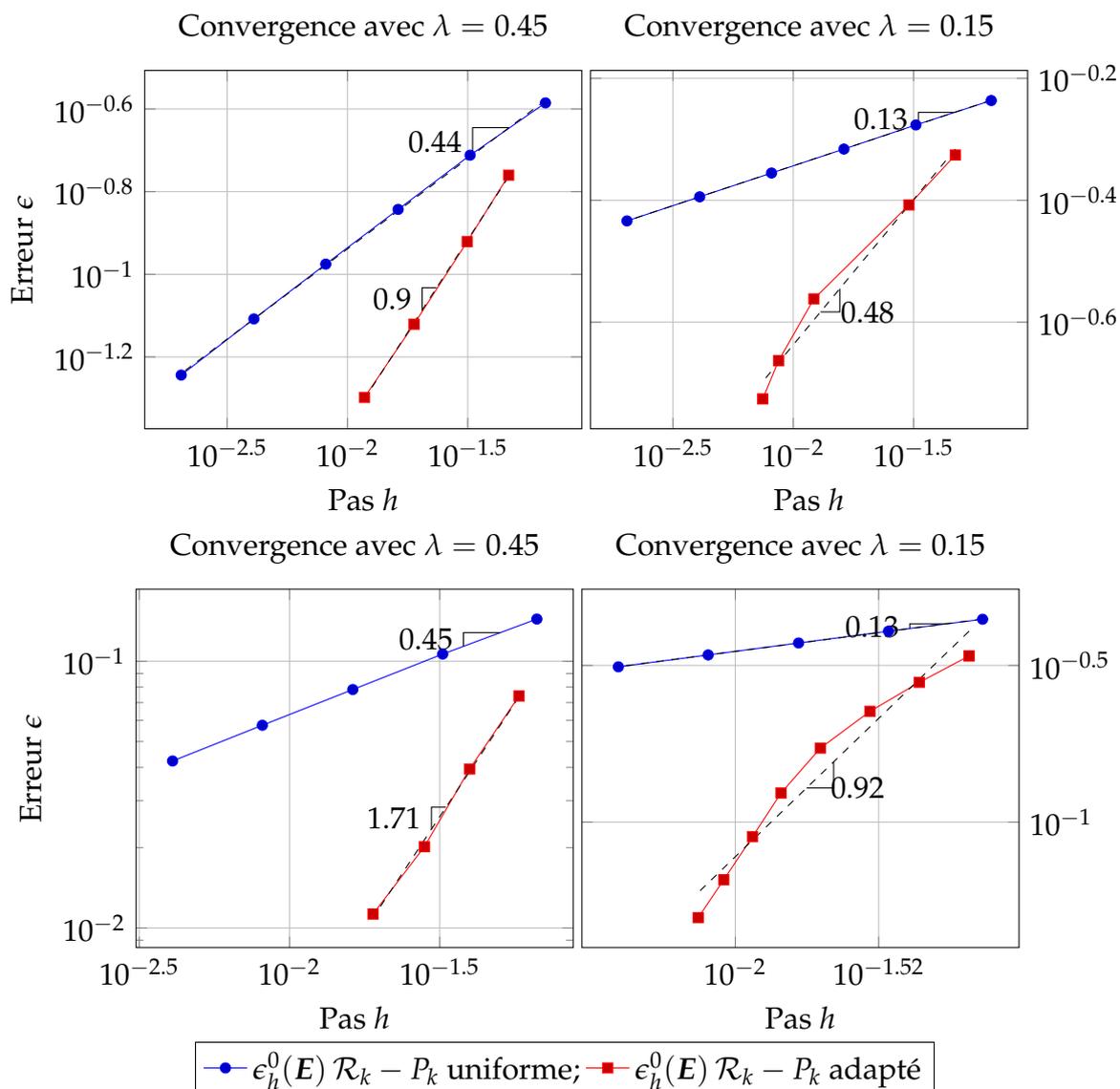
Commençons par le potentiel. On ne représente que l'erreur $\epsilon_h^0(\phi)$ dans les figures ci-dessous. Dans la première ligne on a l'approximation P_1 et dans la deuxième l'approximation P_2 . Rappelons que le pas h est maintenant défini comme $(N_T)^{-1/2}$, où N_T est le nombre des triangles du maillage.



On peut réaliser 8 – 9 adaptations du maillage uniforme initial et puis chaque démarche ultérieure d'adaptation détériore la structure du maillage. On voit que l'ordre de convergence est plus grand et que l'erreur est plus petite que dans le cas du maillage uniforme. De plus, avec le même pas $h = 10^{-2}$ l'erreur sur le maillage adapté est plus petite de 1 ordre que sur le maillage uniforme, par exemple, pour $\lambda = 0.45$ et l'approximation P_1 on a 10^{-3} contre 10^{-2} .

1.4.2 Multiplicateur de Lagrange

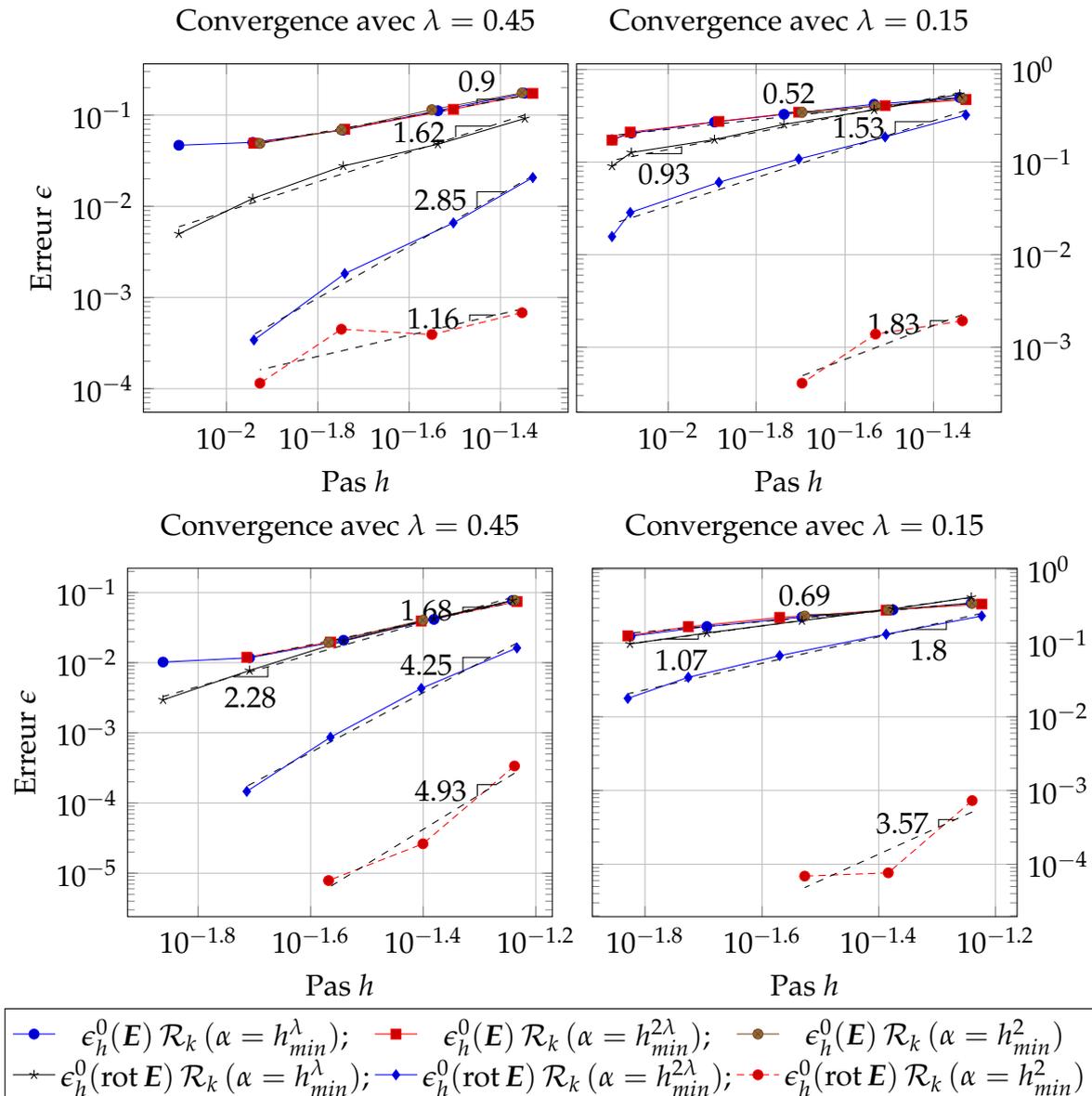
Comparons maintenant la convergence avec le multiplicateur de Lagrange. Comme habitude dans la première ligne de la figure ci-dessous on a les approximations $\mathcal{R}_1 - P_1$ et dans la deuxième on a l'approximation $\mathcal{R}_2 - P_2$.



Dans ce cas on ne gagne pas trop en l'ordre d'erreur, par contre on peut l'atteindre plus vite.

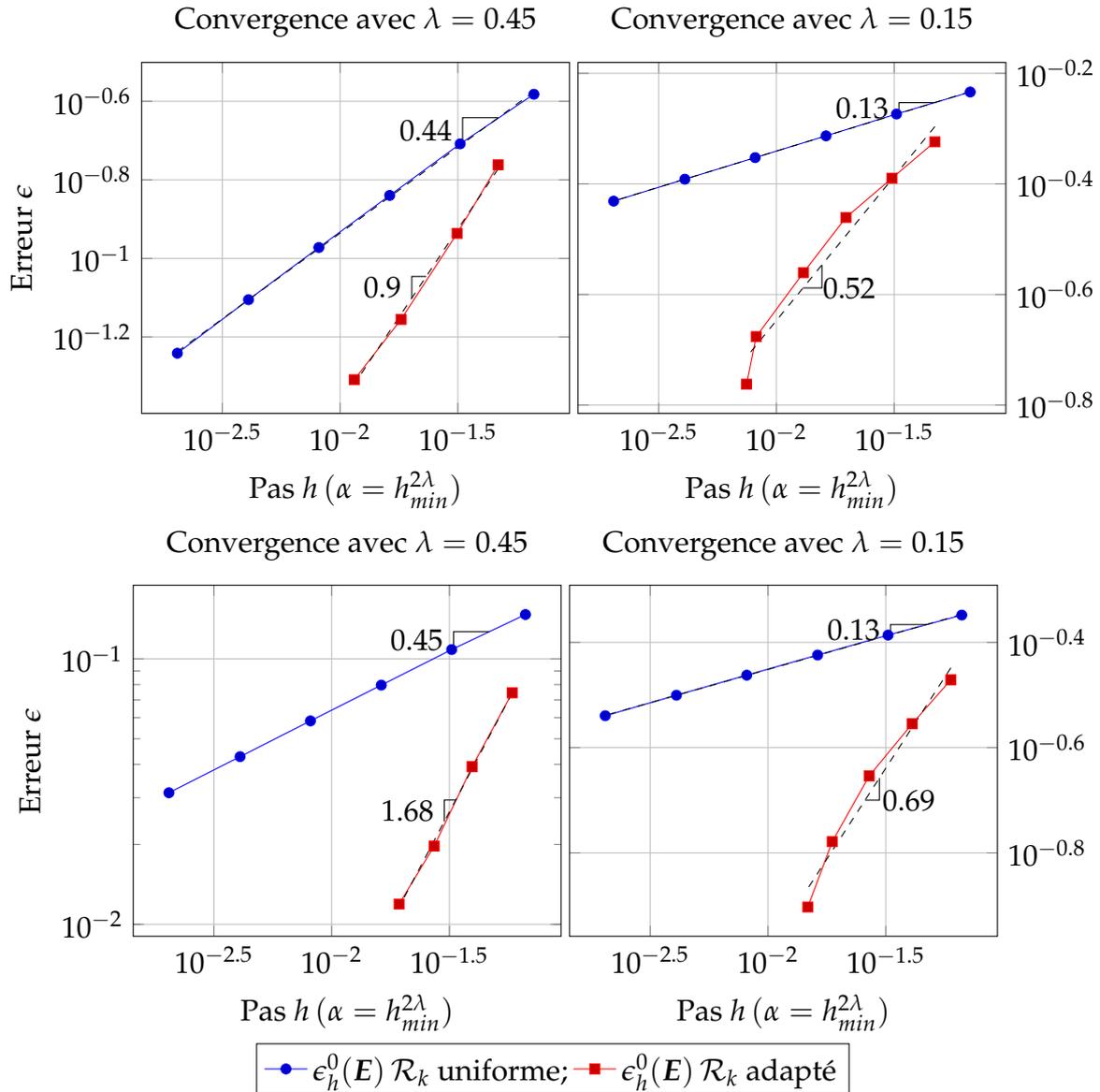
1.4.3 Pénalisation

Finalement nous sommes arrivés à la méthode de pénalisation. Dans le cas du maillage uniforme on a pris comme le paramètre $\alpha = h_{min}^\lambda$ qui est suffisant pour que l'erreur sur le rotationnel ne contribue pas significativement à l'erreur totale sur champ. Dans ce cas on va analyser les erreurs $\epsilon_h^0(E)$ et $\epsilon_h^0(\text{rot } E)$ avec choix différents du paramètre α . Dans les figures ci-dessous nous représentons la convergence de E_h et $\text{rot } E_h$ avec $\alpha = h_{min}^\lambda$, $\alpha = h_{min}^{2\lambda}$ et $\alpha = h_{min}^2$ en utilisant l'approximation \mathcal{R}_k (\mathcal{R}_1 dans la première ligne, \mathcal{R}_2 pour la deuxième).



On voit que les erreurs $\epsilon_h^0(E)$ avec les paramètres différents restent quasi-identiques. Par contre, comme il fallait bien s'y attendre, les erreurs $\epsilon_h^0(\text{rot } E)$ dépend d' α . A la lecture des résultats, il est préférable de choisir $\alpha = h_{min}^{2\lambda}$ pour des raisons de précision et de nombre des niveaux d'adaptations.

Comparons maintenant la convergence de la méthode de pénalisation avec $\alpha = h_{min}^{2\lambda}$. Dans la première ligne de la figure ci-dessous on a l'approximation \mathcal{R}_1 et dans la deuxième on a l'approximation \mathcal{R}_2 .



1.4.4 Comparaison

Pour chaque approximation on représente ci-dessous les tableaux avec le nombre de degrés de liberté (DOF), éléments non-nuls de la matrice (NNZ), l'erreur relative $\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$ pour $\lambda = 0.45$ et le temps de résolution de système linéaires⁵ (CPU). Chaque ligne correspond au même pas h .

DOF	$\mathcal{R}_1 - P_1$			\mathcal{R}_1			
	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$	CPU	DOF	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$	CPU
1,212	10,692	1.74_{-1}	0.001	705	3,435	1.73_{-1}	0
2,608	23,447	1.20_{-1}	0.002	1,546	7,624	1.16_{-1}	0
7,088	64,516	7.57_{-2}	0.005	4,584	22,776	7.00_{-2}	0.001
18,179	166,416	5.04_{-2}	0.014	11,409	56,889	4.91_{-2}	0.004

$\frac{\text{nnz}}{\text{dof}} \approx 9$ $\frac{\text{dof}(\mathcal{R}_1 - P_1)}{\text{dof}(\mathcal{R}_1)} \approx 1.6$ $\frac{\text{nnz}}{\text{dof}} \approx 5$

5. le temps d'assemblage est plus petit que 1 seconde dans tout les cas.

$\mathcal{R}_2 - P_2$				\mathcal{R}_2			
DOF	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$	CPU	DOF	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$	CPU
2,774	47,620	7.41 ₋₂	0.003	1,498	17,060	7.46 ₋₂	0.001
5,810	101,092	3.94 ₋₂	0.006	3,242	37,252	3.93 ₋₂	0.001
11,516	201,652	2.02 ₋₂	0.012	6,784	78,272	1.97 ₋₂	0.002
25,160	442,450	1.13 ₋₂	0.032	13,410	155,076	1.19 ₋₂	0.008
$\frac{\text{nnz}}{\text{dof}} \approx 17.5$				$\frac{\text{nnz}}{\text{dof}} \approx 11.5$			
$\frac{\text{dof}(\mathcal{R}_2 - P_2)}{\text{dof}(\mathcal{R}_2)} \approx 1.7$							

D'après ces tableaux on voit que l'on obtient les erreurs identiques avec même pas h en utilisant ces deux méthodes, cependant la pénalisation consomme plus moins des ressources calculatoires.

1.5 Résumé

Nous avons réalisé l'étude numérique de la résolution des équations stationnaires de Maxwell en deux dimensions avec une solution singulière. On a résolu ce problème par deux approches : par le potentiel ϕ avec les éléments nodaux et le calcul direct du champ E avec les éléments d'arêtes. Dans la première approche on a obtenu que le potentiel approché ϕ_h converge avec l'ordre 2λ en norme L^2 et un peu moins que λ en norme H^1 vers ϕ . Cependant le champ, calculé par $E_h = \sigma \text{rot} \phi_h$, a une précision mauvaise par rapport au calcul direct du champ (la deuxième approche). Dans la deuxième approche il fait prendre en compte la contrainte de la divergence nulle. Pour cela on a utilisé deux méthodes : l'introduction du multiplicateur de Lagrange et la méthode de la pénalisation. Dans le premier cas on a obtenu que le champ E_h converge avec l'ordre λ en norme $\mathbf{H}(\text{rot})$ en utilisant les approximations $\mathcal{R}_k - P_k$ de premier et deuxième ordre. Dans la deuxième méthode de pénalisation, en faisant varier le paramètre de la régularisation α , on a obtenu que l'erreur du rotationnel du champ E_h dépend linéairement en échelle logarithmique du paramètre α à pas fixé, autrement dit $\text{rot} E_h$ converge avec l'ordre de l'exposant d' α en norme L^2 pour les approximations \mathcal{R}_k . De même à pas h varié et à α fixé l'erreur $\epsilon_h^0(\text{rot} E)$ ne change pas. Pour ces raisons on a choisi comme le paramètre $\alpha = h_{\min}^\lambda$ (sur les maillages uniformes) pour obtenir l'ordre de la convergence au moins λ . Cependant l'erreur $\epsilon_h^0(\text{rot} E)$ reste identique et ne dépend pas de l'ordre d'approximation \mathcal{R}_k , mais pour le problème bidimensionnel elle est suffisamment petite pour ne pas contribuer à l'erreur totale $\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$.

Enfin, nous constatons que la méthode de la pénalisation avec le choix du paramètre $\alpha = h_{\min}^\lambda$ nous donne l'ordre de la convergence λ pour le champ E_h en norme L^2 et en norme $\mathbf{H}(\text{rot})$ et la même précision que la méthode de point selle, mais qu'en outre elle est plus performante que cette dernière du point de vue du calcul numérique (nombre d'inconnues, temps calcul).

Chapitre 2

Equations de Maxwell en trois dimensions avec une solution singulière

2.1 Equations de Maxwell

Dans cette section on va résoudre les équations stationnaires de Maxwell qu'avant mais en trois dimensions. A la différence des équations dans le chapitre précédent on va les résoudre en présence de charges, c'est-à-dire que le champ E doit vérifier $\operatorname{div} \sigma E = \rho$ avec une certaine fonction $\rho \in L^2(\Omega)$. Soit Ω domaine borné de \mathbb{R}^3 obtenu à partir du domaine bidimensionnel du chapitre précédent avec un prolongement en direction de l'axe OZ , autrement dit $\Omega =]-a, a[\times]0, a[$, $a > 0$. On a donc

$$(\mathcal{E}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } E \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \text{ telle que} \\ \mathbf{rot} \operatorname{rot} E = 0 \quad (\Omega), \\ \operatorname{div} \sigma E = \rho \quad (\Omega), \\ E \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega), \end{array} \right.$$

avec certaine fonction à valeurs vectorielles $\mathbf{g} \in L^2(\partial\Omega)$ à valeurs tangentielles et une fonction scalaire $\rho \in L^2(\Omega)$.

On utilise la fonction Φ obtenue dans le chapitre précédent pour trouver la solution exacte du problème (\mathcal{E}) . On prend $E = \nabla \Psi$, où la fonction $\Psi = \Phi f$ avec f ne dépendant que de z . On a évidemment que $\mathbf{rot} E = \mathbf{rot} \nabla \Psi = 0$ et $\operatorname{div} \sigma E = f \operatorname{div}_{2d} \sigma \nabla_{2d} \Phi + \sigma \Phi \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Le premier terme est égal à 0. Et on prend donc comme la fonction $\rho = \sigma \Phi \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \in L^2(\Omega)$, car $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ et Ω est un domaine borné.

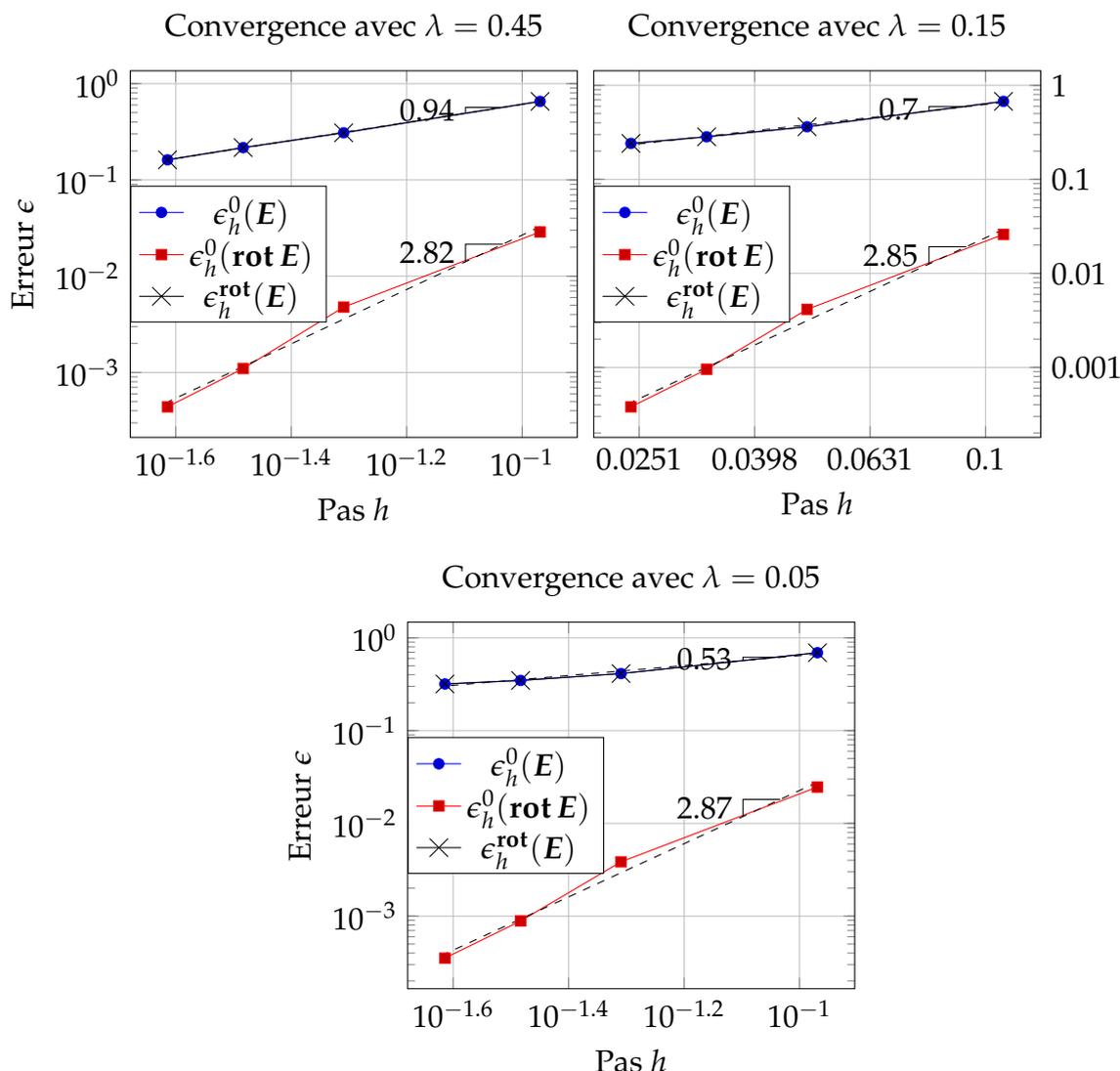
2.1.1 Multiplicateur de Lagrange

On omet les détails décrits en premier chapitre et on passe directement à la formulation variationnelle discrète

$$(\mathcal{E} \mathcal{M}_V^h) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (E_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times V_h^0 \text{ telle que} \\ a(E_h, v_h) + b(v_h, p_h) = 0 \quad \forall v_h \in \mathbf{X}_h^0, \\ b(E_h, q_h) = l(q_h) \quad \forall q_h \in V_h^0, \\ E_h \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega), \end{array} \right.$$

où les formes bilinéaires $a(E_h, v_h) = \int_{\Omega} \mathbf{rot} E_h \cdot \mathbf{rot} v_h$, $b(v, p) = \int_{\Omega} \sigma v_h \cdot \nabla p_h$ et la forme linéaire $l(q_h) = - \int_{\Omega} \rho q_h$. On prend comme les espaces \mathbf{X}_h et \mathbf{X}_h^0 les éléments finis d'arêtes de type Nédélec \mathcal{N}_k en trois dimensions et comme d'habitude les éléments finis nodaux de type Lagrange P_k pour l'espace de multiplicateurs V_h^0 , avec $k = 1, 2$.

Ci-dessous on représente la convergence du champ E_h et $\mathbf{rot} E_h$ avec l'approximation $\mathcal{N}_1 - P_1$.



Pour tous λ on voit que l'erreur $\epsilon_h^0(\mathbf{rot} E)$ converge plus vite que $\epsilon_h^0(E)$ et donc elle ne contribuera pas significativement à l'erreur totale $\epsilon_h^{\mathbf{rot}}(E)$. On trouve l'ordre de convergence $1/2 + \lambda$ pour E_h en norme L^2 .

2.1.2 Pénalisation

La démarche dans la section 1.2.2 du chapitre précédent ne fonctionne pas en présence de charges. Les auteurs de [5] ont proposé l'approximation suivante

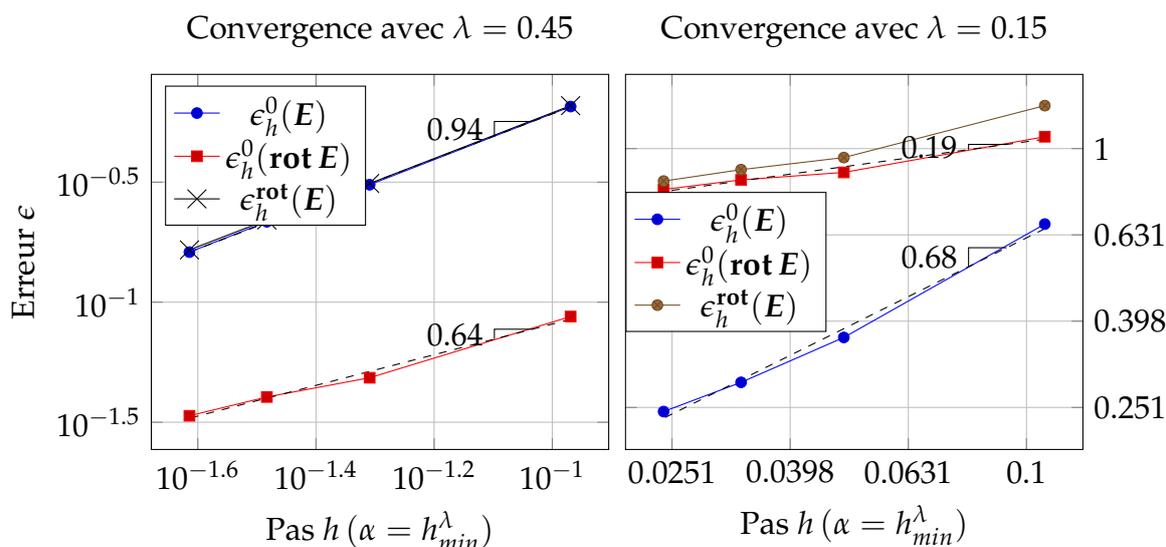
$$(\mathcal{E} \mathcal{P}_V^h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } E_h \in \mathbf{X}_h \text{ tel que} \\ a_\alpha(E_h, v_h) = \alpha(h)(\sigma \nabla \chi_h, v_h) \quad \forall v_h \in \mathbf{X}_h^0, \\ E_h \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega), \end{array} \right.$$

avec la forme bilinéaire $a_\alpha(E_h, v_h) = \int_\Omega \mathbf{rot} E_h \cdot \mathbf{rot} v_h + \alpha(h) \int_\Omega \sigma E_h \cdot v_h$ où le paramètre $\alpha(h) > 0$ dépend que de h et la fonction χ_h est la solution du problème

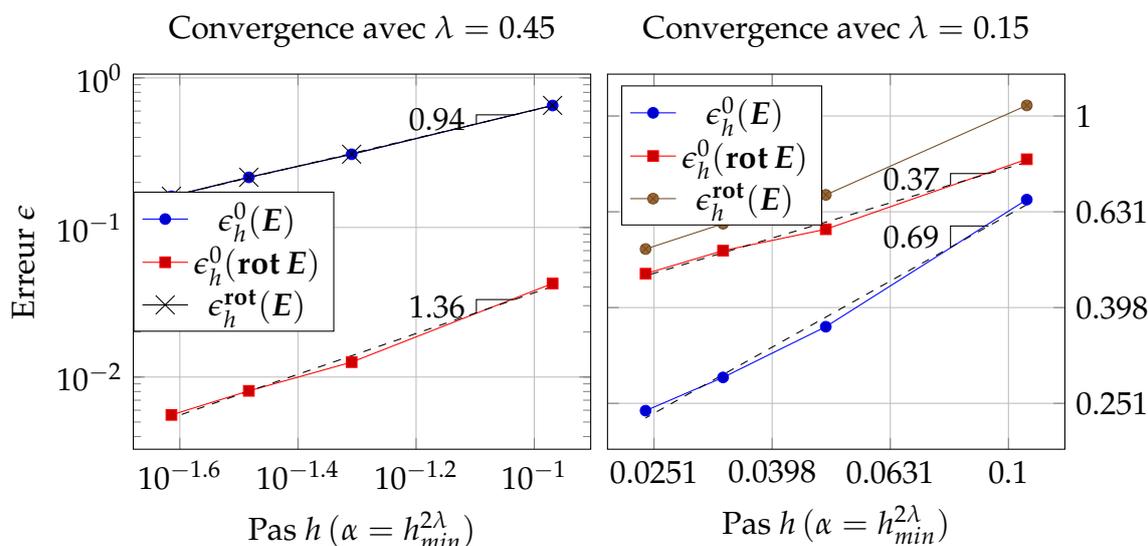
$$(\mathcal{X}_V^h) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \chi_h \in V_h^0 \text{ telle que} \\ \int_\Omega \sigma \nabla \chi_h \cdot \nabla \psi_h = - \int_\Omega \rho \psi_h \quad \forall \psi_h \in V_h^0. \end{array} \right.$$

Comme dans le cas du multiplicateur de Lagrange on discrétise les espaces \mathbf{X}_h et \mathbf{X}_h^0 avec les éléments finis d'arêtes de type Nédélec \mathcal{N}_k et l'espace V_h^0 avec les éléments finis nodaux de type Lagrange P_k , avec $k = 1, 2$.

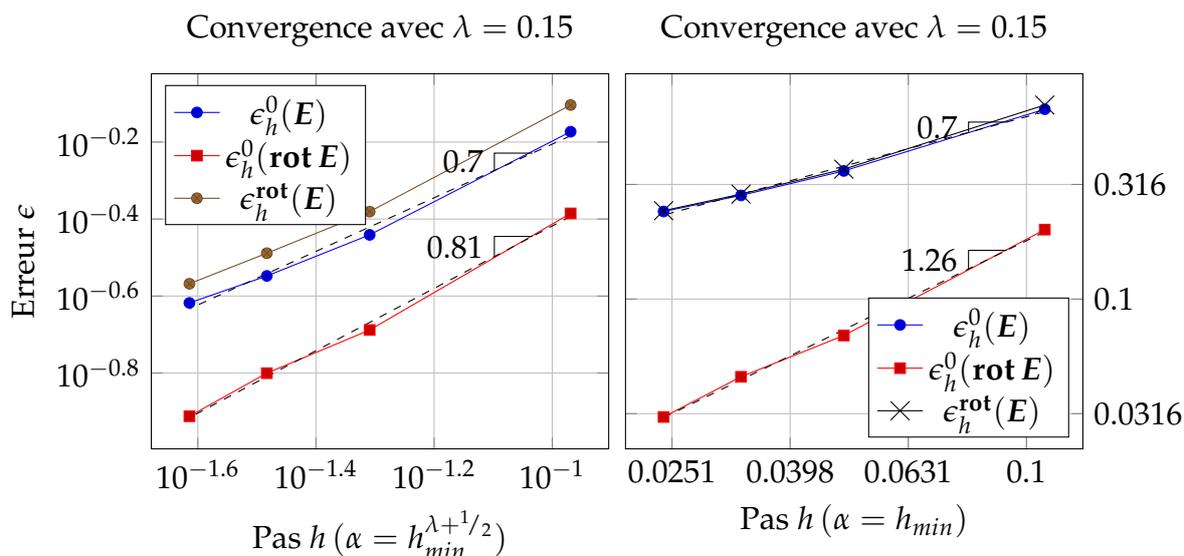
On représente ci-dessous les résultats de convergence du champ E_h et $\mathbf{rot} E_h$ pour $\alpha = h_{min}^\lambda$ avec l'approximation \mathcal{N}_1 .



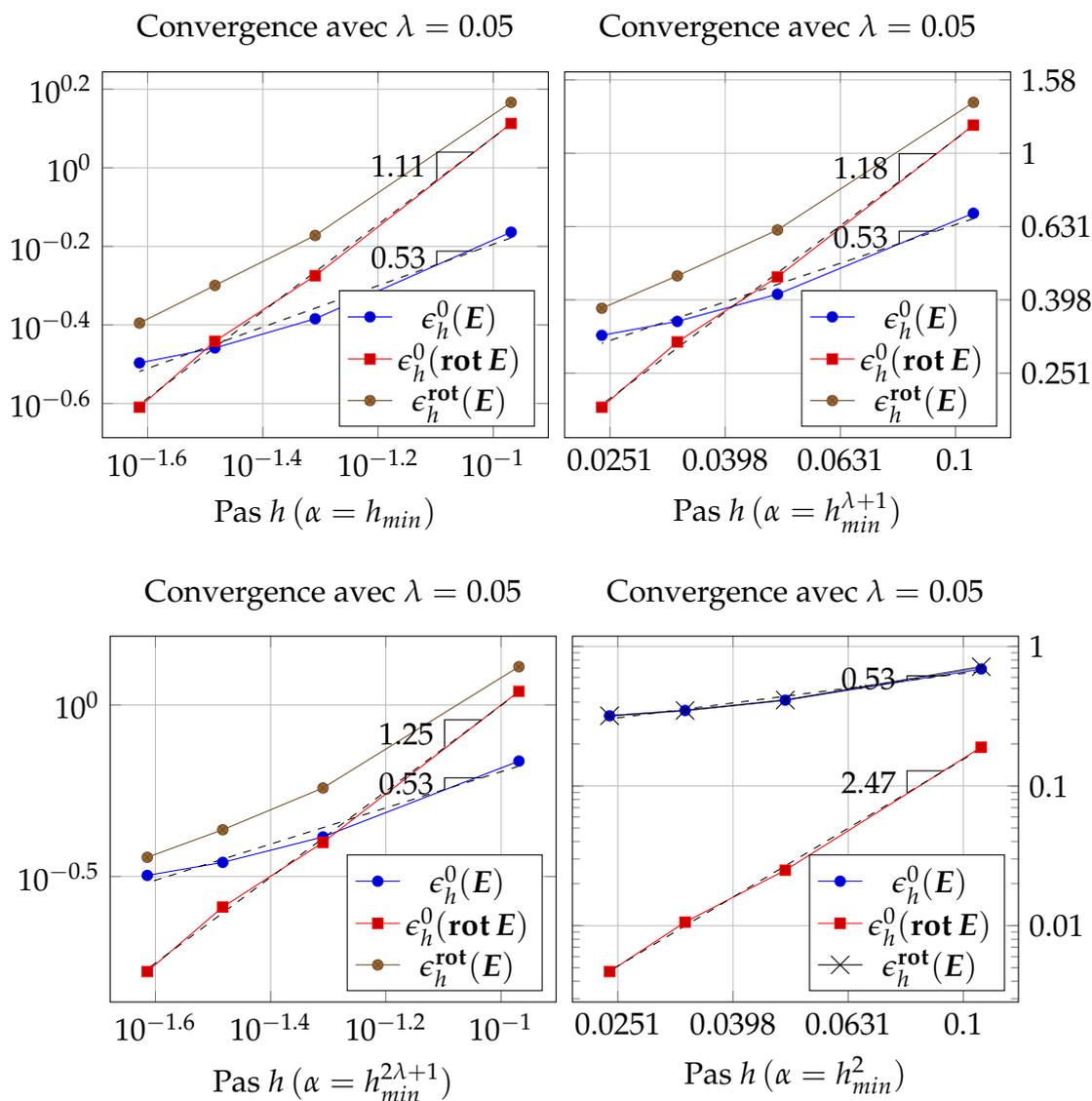
Pour $\lambda = 0.45$ on voit que la pente de $\epsilon_h^0(\mathbf{rot} E)$ est plus petite que la pente de $\epsilon_h^0(E)$ est cela peut poser des problèmes lorsque le pas h devient plus petit. Pour $\lambda = 0.15$ l'erreur est trop grande et donc le choix $\alpha = h_{min}^\lambda$ ne convient pas dans ce cas. On va donc essayer avec $\alpha = h_{min}^{2\lambda}$.



On voit ici que pour $\lambda = 0.45$ tous est bon, par contre pour $\lambda = 0.15$ ce ne convient pas encore. On essaie avec $\alpha = h_{min}^{\lambda+1/2}$ et $\alpha = h_{min}$. On n'affiche pas les résultats pour $\lambda = 0.45$, car ils sont peu distincts de $\alpha = h_{min}^{2\lambda}$.

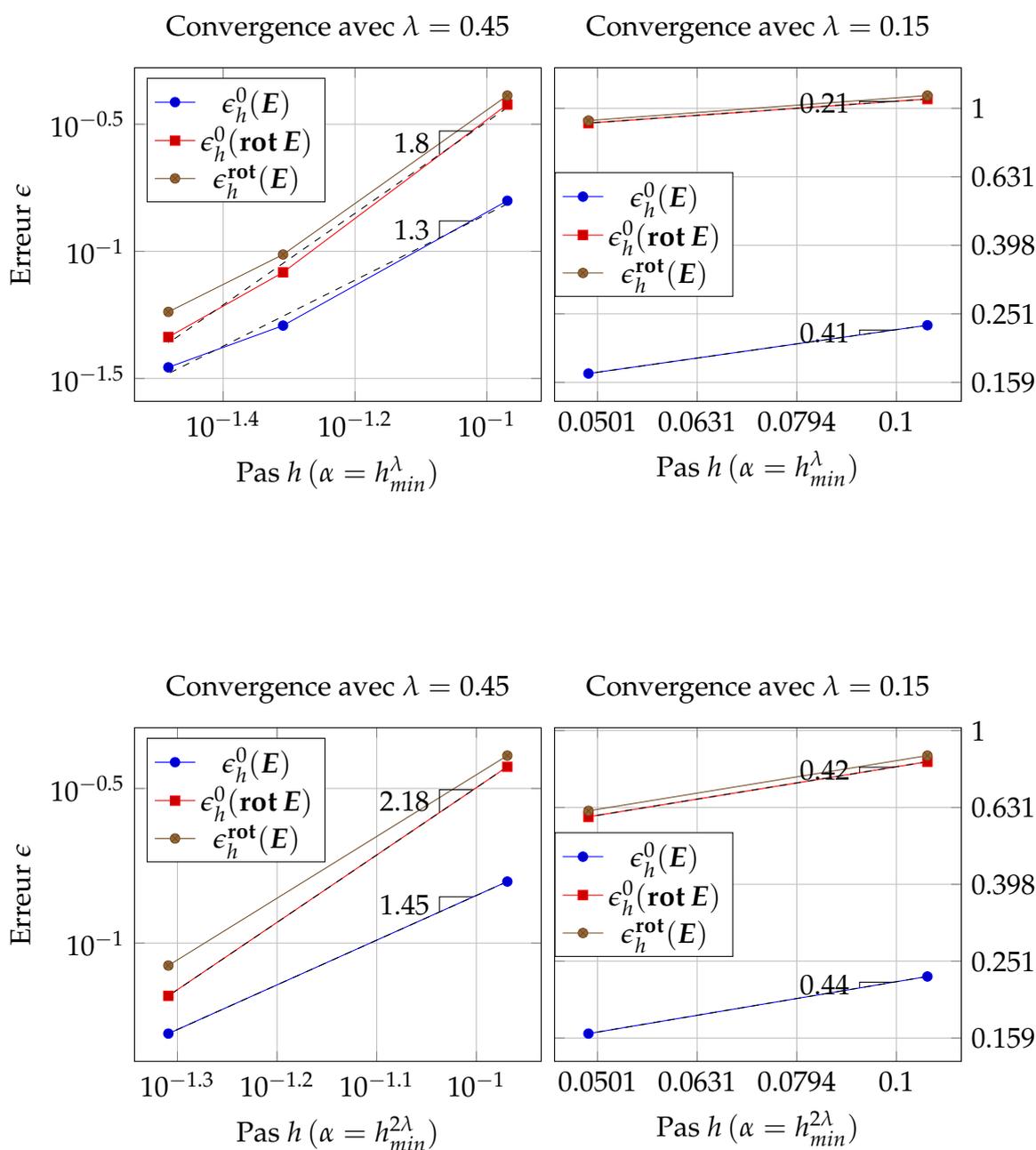


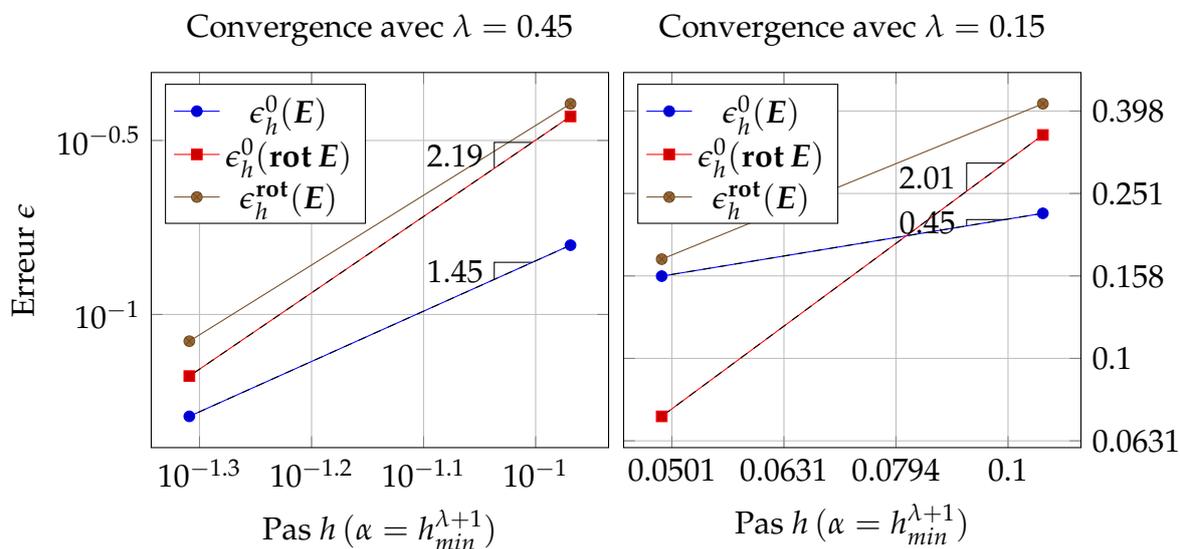
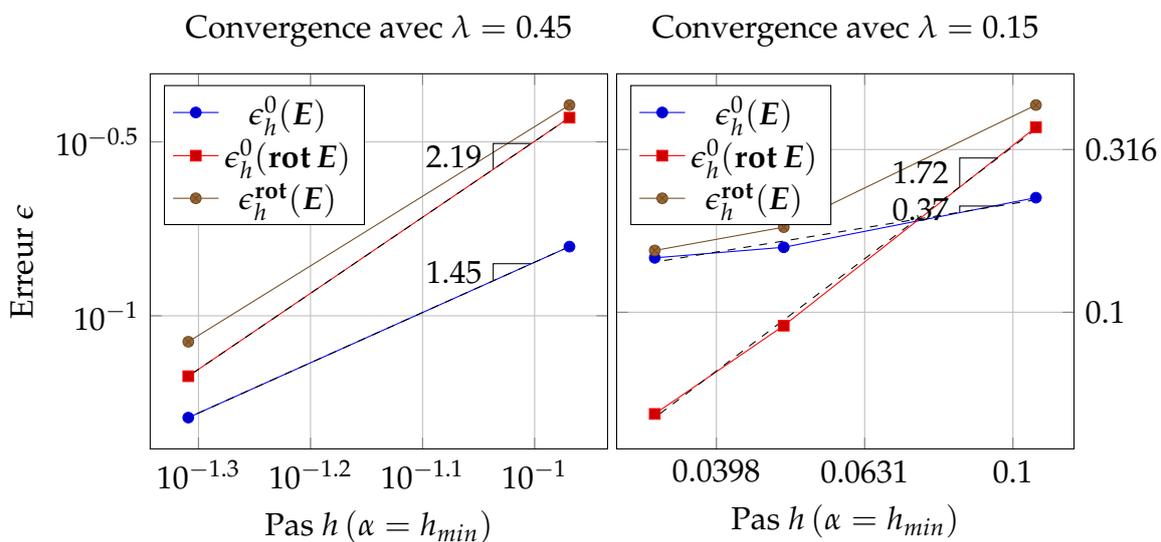
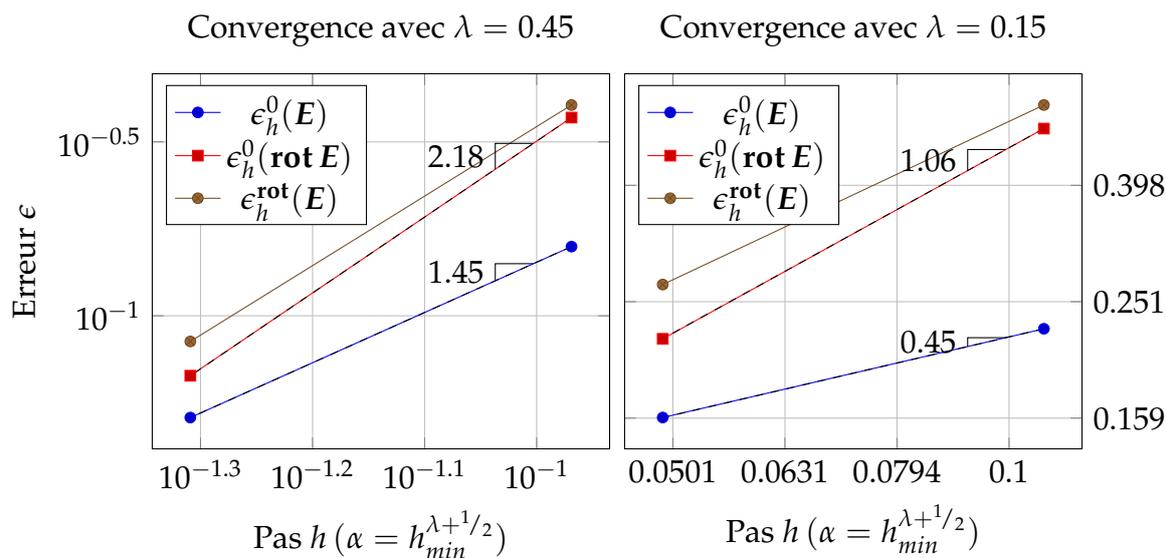
Avec le choix $\alpha = h_{min}^{\lambda+1/2}$ la vitesse de convergence de $\epsilon_h^0(\text{rot } E)$ est identique à $\epsilon_h^0(E)$, mais elle contribue l'erreur à totale $\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$. Avec $\alpha = h_{min}$ on obtient qu'est-ce-qu'on veut! Est-ce-qu'il suffit ce choix d' α pour $\lambda = 0.05$? Ci-dessous on représente les convergences avec les choix différents du paramètre α .

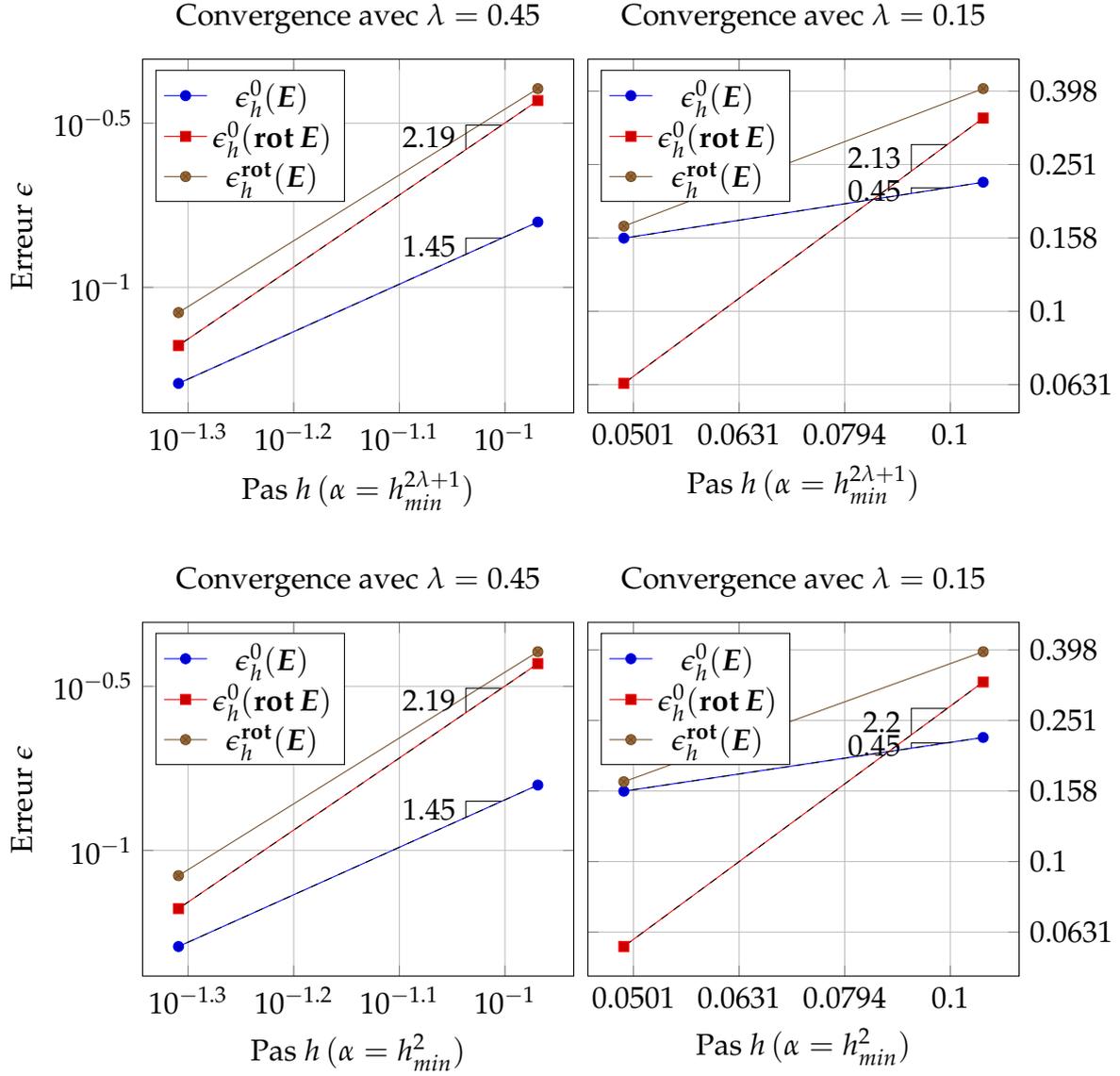


A la lecture des résultats et si on est capable de calculer sur des maillages fins en trois dimensions, le choix du paramètre $\alpha = h_{min}$ est suffisant pour ne pas contribuer à l'erreur totale du champ E_h avec l'approximation \mathcal{N}_1 . Par contre, si on est limité, il est préférable de choisir $\alpha = h_{min}^2$.

On passe maintenant à l'approximation \mathcal{N}_2 . On représente ci-dessous les résultats obtenus avec le différent choix de paramètre α .



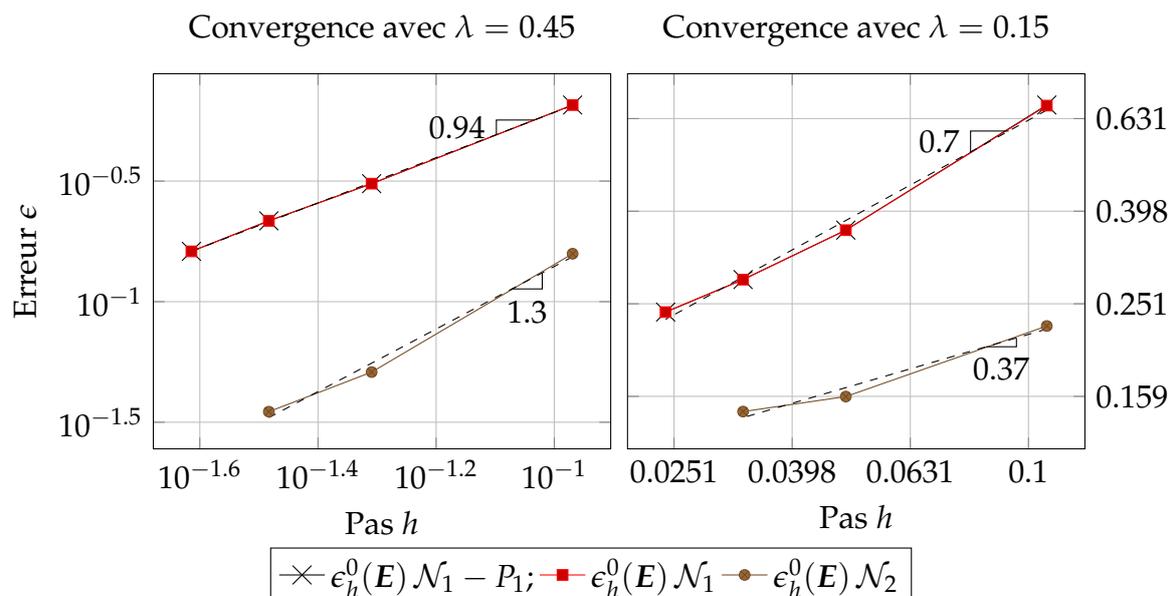




Pour $\lambda = 0.45$ le choix différent du paramètre α n'influence pas à l'erreur totale $\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$ à partir d' $\alpha = h_{\min}^\lambda$. La pente de $\epsilon_h^0(\text{rot } E)$ est plus grande que $\epsilon_h^0(E)$ et donc avec les maillages plus fins on attend que l'erreur $\epsilon_h^0(\text{rot } E)$ deviendra plus petit que l'erreur $\epsilon_h^0(E)$. Par contre, pour $\lambda = 0.15$ le choix du paramètre $\alpha = h_{\min}^\lambda$ et $\alpha = h_{\min}^{2\lambda}$ ne convient pas. Aussi à la lecture des résultats on voit qu'à partir $\alpha = h_{\min}^{\lambda+1/2}$ la pente de l'erreur $\epsilon_h^0(\text{rot } E)$ est plus grande que $\epsilon_h^0(E)$ et la diminution ultérieure de paramètre α n'influence pas à l'erreur totale de champ E . On constate donc pour les deux cas que le choix du paramètre $\alpha = h_{\min}$ se révèle meilleur.

2.2 Comparaison

Ci-dessous on représente une comparaison des deux méthodes. On n'affiche que la convergence d'erreur $\epsilon_h^0(E)$ avec les approximations $\mathcal{N}_1 - P_1$ pour le problème point selle et \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 pour la pénalisation avec paramètre $\alpha = h_{\min}$.



Pour premier ordre on obtient que l'erreur relatives sont identiques avec l'approximation $\mathcal{N}_1 - P_1$ et avec \mathcal{N}_1 . L'ordre de convergence égal à $0.94 \approx 1/2 + \lambda$ pour $\lambda = 0.45$ et $0.7 \approx 1/2 + \lambda$ pour $\lambda = 0.15$. Pour le deuxième ordre d'approximation \mathcal{N}_2 on obtient l'ordre de convergence 1.3 pour $\lambda = 0.45$ ce qui est plus grand que avec premier ordre, par contre, on a l'inverse pour $\lambda = 0.15$ où on obtient l'ordre 0.37 plus petit que avec premier ordre 0.7. Toutefois dans tous les cas l'erreur avec \mathcal{N}_2 est plus petite que celle avec \mathcal{N}_1 .

Pour chaque approximation on représente ci-dessous les tableaux avec le nombre de degrés de liberté (DOF), éléments non-nuls de la matrice (NNZ), l'erreur relative $\epsilon_h^{\text{rot}}(\mathbf{E})$ pour $\lambda = 0.45$ et le temps de résolution de système linéaires (CPU). Chaque ligne correspond au même pas h .

$\mathcal{N}_1 - P_1$				\mathcal{N}_1			
DOF	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(\mathbf{E})$	CPU	DOF	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(\mathbf{E})$	CPU
1,626	34,652	6.55 ₋₁	0.003	1,186	16,672	6.55 ₋₁	0.001
14,331	340,239	3.09 ₋₁	0.055	10,887	167,427	3.09 ₋₁	0.039
45,383	1,112,348	2.16 ₋₁	0.339	34,913	550,703	2.16 ₋₁	0.186
109,282	2,724,905	1.62 ₋₁	4.165	84,624	1,353,504	1.62 ₋₁	0.756
$\frac{nnz}{dof} \approx 24.5$ $\frac{dof(\mathcal{R}_1 - P_1)}{dof(\mathcal{R}_1)} \approx 1.3$				$\frac{nnz}{dof} \approx 15$			

\mathcal{N}_2			
DOF	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(\mathbf{E})$	CPU
5,920	232,568	4.10 ₋₁	0.012
57,030	2,381,820	9.71 ₋₂	0.363
185,470	7,874,420	5.78 ₋₂	146.602
$\frac{nnz}{dof} \approx 40$			

D'après ces tableaux on voit que l'on obtient les erreurs identiques avec même pas h en utilisant ces deux méthodes, cependant la pénalisation consomme beaucoup moins de ressources calculatoires.

2.3 Résumé

On a fait les expériences numériques pour la résolution du problème stationnaire des équations de Maxwell en trois dimensions. On a utilisé deux méthodes, le multiplicateur de Lagrange et la pénalisation. Les deux méthodes nous donnent même ordre de convergence et le même l'ordre d'erreur avec premier ordre des éléments finis. Par contre, la pénalisation est plus efficace du point de vue du calcul numérique (nombre d'inconnues, temps calcul) comme en deux dimensions. Par rapport du choix de paramètre de régularisation α , les résultats numériques nous dictent qu'il doit dépendre de λ et vérifie les relations $\alpha \lesssim h_{min}^\lambda$ pour $\lambda = 0.45$ en utilisant les éléments finis \mathcal{N}_1 et $\alpha \lesssim h_{min}^{2\lambda}$ en \mathcal{N}_2 . Pour λ plus petit on doit diminuer α et prendre $\alpha = h_{min}$.

Chapitre 3

Problème aux valeurs propres des équations de Maxwell

Dans ce chapitre on examinera le problème aux valeurs propres pour le champ électrique E dans un domaine borné de \mathbb{R}^d avec $d = 2, 3$. Si l'on fait discrétisation de la condition sur la divergence du champ, par nature d'équation une valeur propre nulle λ correspond au champ non nul $E = \nabla\phi$. Lorsqu'on s'intéresse aux valeurs propres non nulles on doit se débarrasser en quelque sorte de tous champs scalaires ϕ tels que $E = \nabla\phi$. L'idée consiste à projeter orthogonalement l'espace $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ sur l'espace des champs à divergence nulle qui n'ont pas une composante gradient. On remarque que cette projection nous permet automatiquement prendre en compte la loi de Gauss.

3.1 Problème électrique aux valeurs propres

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d avec $d = 2, 3$ de frontière $\partial\Omega$ connexe. Le problème aux valeurs propres pour le champ électrique s'écrit

$$(\mathcal{E}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (E \neq 0, \lambda) \in \mathbf{X}^0 \times \mathbb{R} \text{ telle que} \\ \mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} E = \lambda \varepsilon E \quad (\Omega), \\ \operatorname{div} \varepsilon E = 0 \quad (\Omega), \\ E \times \mathbf{n} = 0 \quad (\partial\Omega), \end{array} \right.$$

où l'espace $\mathbf{X}^0 = \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, μ et ε sont les fonctions constantes par morceaux et telles que $0 < \mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max} < \infty$, $0 < \varepsilon_{\min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} < \infty$ et \mathbf{n} un vecteur normal unité à la frontière $\partial\Omega$ dirigé à l'extérieur du domaine Ω .

Remarque 1. La condition $\operatorname{div} \varepsilon E = 0$ dans Ω est équivalente à $(E, \nabla\phi)_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon E, \nabla\phi) = 0$ pour tous $\phi \in H_0^1(\Omega)$, où (\cdot, \cdot) est un produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

On passe à la formulation variationnelle

$$(\mathcal{E}_{V,\lambda}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (E \neq 0, \lambda) \in \mathbf{X}^0 \times \mathbb{R} \text{ telle que} \\ a_\mu(E, v) = \lambda (E, v)_\varepsilon \quad \forall v \in \mathbf{X}^0, \\ (E, \nabla q)_\varepsilon = 0 \quad \forall q \in V^0, \end{array} \right.$$

où la forme bilinéaire est $a_\mu(E, v) = \int_\Omega \mu^{-1} \mathbf{rot} E \cdot \mathbf{rot} v$, et $V^0 = H_0^1(\Omega)$.

3.2 Décomposition orthogonale de l'espace $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$

Soit λ une valeur propre nulle. Alors, si E est la fonction propre du problème $(\mathcal{E}_{V,\lambda})$, on a $E = \nabla\phi$ avec $\phi \in V^0$ puisque $\mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} E = 0$ [9], si $(\nabla\phi, \nabla q)_\varepsilon = 0$ pour tous $q \in V^0$. Donc l'espace $\nabla V^0 = \{v \in \mathbf{X}^0 : \exists \phi \in V^0 \text{ et } v = \nabla\phi\}$, qui est bien un sous-espace de \mathbf{X}^0 grâce à la séquence exacte, contient des fonctions propres E du problème $(\mathcal{E}_{V,\lambda})$, si $(E, \nabla q)_\varepsilon = 0$ pour tous $q \in V^0$. Mais, si on suppose que $(E = \nabla\phi, 0)$ avec $\phi \in V^0$ est la solution du problème $(\mathcal{E}_{V,\lambda})$, on a forcément $\phi = 0$ dans Ω , car la condition $(\nabla\phi, \nabla q)_\varepsilon = 0$ pour $q = \phi \in V^0$ entraîne $\phi = 0$. Il n'y a donc pas de valeur propre nulle.

Pour cette raison on décompose l'espace \mathbf{X}^0 à deux sous-espaces orthogonaux ∇V^0 et \mathbf{U}^0 , où $\mathbf{U}^0 = \{u \in \mathbf{X}^0 : (u, \nabla q)_\varepsilon = 0 \forall q \in V^0\}$. On a donc $\mathbf{X}^0 = \nabla V^0 \oplus \mathbf{U}^0$. Cette décomposition est valable car l'espace ∇V^0 est fermé dans \mathbf{X}^0 et l'espace $\mathbf{U}^0 = (\nabla V^0)^\perp$. Ce dernier espace \mathbf{U}^0 contient les fonctions à ε -divergence nulle. On définit l'opérateur de projection orthogonale $\mathcal{P}_U : \mathbf{X}^0 \rightarrow \mathbf{U}^0$. Soit $E = \nabla\phi + u$ avec $\phi \in V^0$ et $u \in \mathbf{U}^0$, donc $\mathcal{P}_U E = u$.

Soit maintenant λ une valeur propre non nulle. Si $E = \nabla\phi + u$ est la solution du problème $(\mathcal{E}_{V,\lambda})$ on a toujours, d'après la contrainte $(E, \nabla q)_\varepsilon = 0 \forall q \in V^0$, que $\phi = 0$ dans Ω . Donc on peut se placer dans la formulation variationnelle suivante

$$(\mathcal{U}_{V,\lambda}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u \neq 0, \lambda) \in \mathbf{U}^0 \times \mathbb{R} \text{ telle que} \\ a_\mu(u, v) = \lambda(u, v)_\varepsilon \quad \forall v \in \mathbf{U}^0, \end{array} \right.$$

ou bien

$$(\mathcal{P}^{\mathcal{E}_{V,\lambda}}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (E, \lambda) \in \mathbf{X}^0 \times \mathbb{R} \text{ telle que } \mathcal{P}_U E \neq 0 \\ a_\mu(E, v) = \lambda(\mathcal{P}_U E, v)_\varepsilon \quad \forall v \in \mathbf{X}^0. \end{array} \right.$$

L'avantage de cette projection est, en premier lieu, à supprimer toutes les valeurs propres nulles ($\lambda = 0 \Rightarrow E \in \nabla V^0 \Rightarrow \mathcal{P}_U E = 0$) et, en deuxième lieu, à éviter la contrainte sur la divergence du champ.

3.3 Discrétisation et la forme matricielle d'opérateur de projection

Soit \mathbf{X}_h un sous-espace de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ de dimension fini. On passe maintenant à la formulation variationnelle discrète

$$(\mathcal{P}^{\mathcal{E}_{V,\lambda}^h}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (E_h, \lambda_h) \in \mathbf{X}_h^0 \times \mathbb{R} \text{ telle que } \mathcal{P}_{\mathbf{U}_h^h} E_h \neq 0 \\ a_\mu(E_h, v_h) = \lambda_h(\mathcal{P}_{\mathbf{U}_h^h} E_h, v_h)_\varepsilon \quad \forall v_h \in \mathbf{X}_h^0, \end{array} \right.$$

avec $\mathbf{X}_h^0 = \mathbf{X}_h \cap \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$. On prend comme l'espace \mathbf{X}_h un espace des éléments finis d'arêtes de type Raviart-Thomas en 2d ou Nédélec en 3d de premier ordre. De même, on choisit $V_h^0 = V_h \cap H_0^1(\Omega)$, avec V_h un espace d'éléments finis de Lagrange nodaux.

Soit \mathcal{T}_h une triangulation de domaine Ω , $\overline{\Omega} = \cup_i K_i$. On notera par n un nœud de triangulation \mathcal{T}_h et par $e = \{m, n\}$ une arête. Soit \mathcal{N} un ensemble de nœuds n et \mathcal{E} d'arêtes e . $|\mathcal{N}|$ et $|\mathcal{E}|$ sont les cardinaux. On définit un opérateur frontière ∂ (voir [10])

qui prend une arête $e = \{m, n\}$ et qui donne une somme $n - m$. Cet opérateur peut être représenté par une matrice ∂ de dimension $|\mathcal{N}| \times |\mathcal{E}|$, qui est bien creux avec les coefficients 0, -1 ou 1. Par exemple, pour un triangle K avec les nœuds l, m, n et avec ces trois arêtes $e_1 = \{l, m\}$, $e_2 = \{m, n\}$ et $e_3 = \{n, l\}$ on a $\partial e_1 = -l + m$, $\partial e_2 = -m + n$ et $\partial e_3 = -n + l$ et la matrice $\partial = \mathbf{G}^t$, où

$$\mathbf{G} = (\mathbf{G}_{e,n}) = \begin{pmatrix} & l & m & n \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Soit $\{w^e\}_e$ une base de \mathbf{X}_h et $\{w^n\}_n$ une base de l'espace des éléments finis nodaux V_h . Donc pour toutes fonctions $E_h \in \mathbf{X}_h$ et $\phi_h \in V_h$ on a $E_h = \sum_e M_e(E_h)w^e$ et $\phi_h = \sum_n \alpha_n w^n$, où $M_e(E_h) = \int_e E_h \cdot \mathbf{t}$ un moment sur l'arête e qui joue un rôle degré de liberté d'espace \mathbf{X}_h et $\alpha_n = \phi_h(n)$ une valeur de ϕ_h au nœud n – degré de liberté d'espace V_h . On écrit les décompositions orthogonales discrètes $\mathbf{X}_h = \nabla V_h^0 \oplus \mathbf{U}_h$ avec $\mathbf{U}_h = \{v_h \in \mathbf{X}_h : (v_h, \nabla p_h)_\varepsilon = 0, \forall p_h \in V_h^0\}$, et $\mathbf{X}_h^0 = \nabla V_h^0 \oplus \mathbf{U}_h^0$ avec $\mathbf{U}_h^0 = \{v_h \in \mathbf{X}_h^0 : (v_h, \nabla p_h)_\varepsilon = 0, \forall p_h \in V_h^0\}$. Dans notre cas $E_h = \nabla \phi_h + \mathbf{u}_h$ développe comme

$$\sum_e M_e(E_h)w^e = \sum_n \alpha_n \nabla w^n + \sum_e M_e(\mathbf{u}_h)w^e.$$

D'après le lemme 3.6 de l'article [10] on a $\nabla w^n = \sum_e \mathbf{G}_{e,n} w^e$ et alors

$$M_e(E_h) = \sum_n \mathbf{G}_{e,n} \alpha_n + M_e(\mathbf{u}_h) \quad \forall e \in \mathcal{E},$$

où \mathcal{E}_i un ensemble des arêtes intérieures. De même on note \mathcal{N}_i un ensemble des sommets intérieurs. On récrit cette équation sous la forme vectorielle. On note les vecteurs

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_{|\mathcal{E}_i|} \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{|\mathcal{N}_i|} \end{pmatrix}, \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{|\mathcal{E}_i|} \end{pmatrix},$$

avec $E_i = M_i(E_h)$ et $U_i = M_i(\mathbf{u}_h)$. On a donc

$$\vec{E} = \mathbf{G}\vec{\alpha} + \vec{U}.$$

On effectue le produit scalaire de $E_h = \nabla \phi_h + \mathbf{u}_h$ par $v_h \in \nabla V_h$ et on obtient

$$(E_h, v_h)_\varepsilon = (\nabla \phi_h, v_h)_\varepsilon.$$

Il existe une fonction $q_h \in V_h$ telle que $v_h = \nabla q_h$. Puisque c'est valable pour toutes fonctions v_h on prend $q_h = w^n$ et on a alors

$$(E_h, \nabla w^n)_\varepsilon = (\nabla \phi_h, \nabla w^n)_\varepsilon \quad \forall w^n.$$

Le terme à gauche est

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_h, \nabla w^n)_\varepsilon &= \sum_e E_e(w^e, \nabla w^n)_\varepsilon && \text{car } E_h = \sum_e E_e w^e \\
&= \sum_e E_e(w^e, \sum_{e'} \mathbf{G}_{e',n} w^{e'})_\varepsilon && \text{car } \nabla w^n = \sum_{e'} \mathbf{G}_{e',n} w^{e'} \\
&= \sum_{e'} \mathbf{G}_{e',n} \sum_e E_e(w^e, w^{e'})_\varepsilon \\
&= \sum_{e'} \mathbf{G}_{e',n} (\mathbf{M}_a^\varepsilon \vec{E})_{e'} && (\mathbf{M}_a^\varepsilon)_{e',e} = (w^e, w^{e'})_\varepsilon \\
&= (\mathbf{G}^t \mathbf{M}_a^\varepsilon \vec{E})_n && \mathbf{G}_{e',n} = (\mathbf{G}^t)_{n,e'}.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire, $(\mathbf{E}_h, \nabla w^n)_\varepsilon$ est la $n^{\text{ième}}$ composante de $\mathbf{G}^t \mathbf{M}_a^\varepsilon \vec{E}$, où \mathbf{M}_a^ε est la matrice de masse d'arêtes de taille $|\mathcal{E}_i| \times |\mathcal{E}_i|$.

De même, le terme à droite est

$$\begin{aligned}
(\nabla \phi_h, \nabla w^n)_\varepsilon &= \sum_m \alpha_m (\nabla w^m, \nabla w^n)_\varepsilon && \text{car } \phi_h = \sum_m \alpha_m w^m \\
&= \sum_m \alpha_m (\mathbf{K}_s^\varepsilon)_{n,m} && (\mathbf{K}_s^\varepsilon)_{n,m} = (\nabla w^m, \nabla w^n)_\varepsilon \\
&= (\mathbf{K}_s^\varepsilon \vec{\alpha})_n,
\end{aligned}$$

où \mathbf{K}_s^ε matrice de rigidité nodale de taille $|\mathcal{N}_i| \times |\mathcal{N}_i|$.

Finalement, on a $\mathbf{G}^t \mathbf{M}_a^\varepsilon \vec{E} = \mathbf{K}_s^\varepsilon \vec{\alpha}$. Soit $(\mathbf{K}_s^\varepsilon)^{-1}$ une matrice inverse de \mathbf{K}_s^ε , donc $\vec{\alpha} = (\mathbf{K}_s^\varepsilon)^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{M}_a^\varepsilon \vec{E}$ ou bien pour $\vec{U} = \vec{E} - \mathbf{G} \vec{\alpha} = (\mathbf{I}_d - \mathbf{G} (\mathbf{K}_s^\varepsilon)^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{M}_a^\varepsilon) \vec{E}$. On a obtenu donc l'opérateur $\mathcal{P}_{U_h}^h$ sous la forme matricielle

$$\mathbf{P}^\varepsilon = \mathbf{I}_d - \mathbf{G} (\mathbf{K}_s^\varepsilon)^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{M}_a^\varepsilon.$$

A la fin, on récrit le problème $(\mathcal{P}_{V,\lambda}^{\varepsilon h})$ sous la forme matricielle équivalente

$$(\mathbf{P}\mathbf{E}_\lambda) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{E}, \lambda_h) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}_i|} \times \mathbb{R} \text{ telle que } \mathbf{P}^\varepsilon \vec{E} \neq 0 \\ \mathbf{K}_a^\mu \vec{E} = \lambda_h \mathbf{M}_a^\varepsilon \mathbf{P}^\varepsilon \vec{E}, \end{array} \right.$$

où \mathbf{K}_a^μ est la matrice de rigidité d'arêtes de taille $|\mathcal{E}_i| \times |\mathcal{E}_i|$, $(\mathbf{K}_a^\mu)_{e'}^e = (\mathbf{rot} w^e, \mathbf{rot} w^{e'})_{\mu-1}$.

Les tests numériques nous montrent que les valeurs propres correspondant aux gradients $\nabla \phi$ (ou $\mathbf{G} \vec{\alpha}$), où $E = \nabla \phi + \mathbf{u}$ (ou $\vec{E} = \mathbf{G} \vec{\alpha} + \vec{U}$), sont instables. Pour cette raison on stabilise le problème $(\mathbf{P}\mathbf{E}_\lambda)$ en ajoutant le terme $\gamma \mathbf{M}_a^\varepsilon$ avec $\gamma > 0$ à gauche. On passe donc au problème

$$(\mathbf{P}\mathbf{E}_\lambda^\gamma) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{E}, \lambda'_h) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}_i|} \times \mathbb{R} \text{ telle que } \mathbf{P}^\varepsilon \vec{E} \neq 0 \\ (\mathbf{K}_a^\mu + \gamma \mathbf{M}_a^\varepsilon) \vec{E} = \lambda'_h \mathbf{M}_a^\varepsilon \mathbf{P}^\varepsilon \vec{E}. \end{array} \right.$$

Pour obtenir les valeurs propres λ_h du problème $(\mathbf{P}\mathbf{E}_\lambda)$ on soustrait naturellement γ de λ'_h , autrement dit $\lambda'_h = \lambda_h + \gamma$. Donc ces deux problèmes $(\mathbf{P}\mathbf{E}_\lambda)$ et $(\mathbf{P}\mathbf{E}_\lambda^\gamma)$ sont

équivalents. En effet,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{K}_a^\mu + \gamma \mathbb{M}_a^\varepsilon) \vec{E} &= (\mathbb{K}_a^\mu + \gamma \mathbb{M}_a^\varepsilon) (\mathbb{G} \vec{\alpha} + \vec{U}) && \text{car } \vec{E} = \mathbb{G} \vec{\alpha} + \vec{U} \\
&= \underbrace{\mathbb{K}_a^\mu \mathbb{G} \vec{\alpha}}_{=0} + \gamma \mathbb{M}_a^\varepsilon \mathbb{G} \vec{\alpha} + (\mathbb{K}_a^\mu + \gamma \mathbb{M}_a^\varepsilon) \vec{U} && \text{car } \mathbf{rot} \nabla \cdot = 0 \\
&= \lambda'_h \mathbb{M}_a^\varepsilon \mathbb{P}^\varepsilon \vec{E} = (\lambda_h + \gamma) \mathbb{M}_a^\varepsilon \mathbb{P}^\varepsilon (\mathbb{G} \vec{\alpha} + \vec{U}) && \text{car } \lambda'_h = \lambda_h + \gamma \\
&= (\lambda_h + \gamma) \mathbb{M}_a^\varepsilon \underbrace{\mathbb{P}^\varepsilon \mathbb{G} \vec{\alpha}}_{=0} + (\lambda_h + \gamma) \mathbb{M}_a^\varepsilon \underbrace{\mathbb{P}^\varepsilon \vec{U}}_{=\vec{U}} && \text{car } \mathbb{P}^\varepsilon \text{ est une projection.}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\gamma \mathbb{M}_a^\varepsilon \mathbb{G} \vec{\alpha} + \mathbb{K}_a^\mu \vec{U} + \gamma \mathbb{M}_a^\varepsilon \vec{U} = \lambda_h \mathbb{M}_a^\varepsilon \vec{U} + \gamma \mathbb{M}_a^\varepsilon \vec{U},$$

ou bien

$$\gamma \mathbb{M}_a^\varepsilon \mathbb{G} \vec{\alpha} + \mathbb{K}_a^\mu \vec{U} = \lambda_h \mathbb{M}_a^\varepsilon \vec{U}.$$

On effectue le produit scalaire dans $\mathbb{R}^{|\varepsilon_i|}$, noté $(\cdot | \cdot)$, par $\mathbb{G} \vec{\alpha}$ et on obtient

$$\gamma (\mathbb{M}_a^\varepsilon \mathbb{G} \vec{\alpha} | \mathbb{G} \vec{\alpha}) + (\mathbb{K}_a^\mu \vec{U} | \mathbb{G} \vec{\alpha}) = \lambda_h (\mathbb{M}_a^\varepsilon \vec{U} | \mathbb{G} \vec{\alpha}).$$

Puisque la matrice \mathbb{K}_a^ε est symétrique et $\mathbb{K}_a^\mu \mathbb{G} = 0$, et les vecteurs \vec{U} et $\mathbb{G} \vec{\alpha}$ sont orthogonaux, on a alors

$$\gamma (\mathbb{M}_a^\varepsilon \mathbb{G} \vec{\alpha} | \mathbb{G} \vec{\alpha}) = \gamma \|\mathbb{G} \vec{\alpha}\|^2 = 0 \Rightarrow \mathbb{G} \vec{\alpha} = 0.$$

Finalement, on a $\vec{E} = \vec{U}$ et donc le problème $(\mathbb{P}\mathbb{E}_\lambda^\gamma)$ devient

$$(\mathbb{K}_a^\mu + \gamma \mathbb{M}_a^\varepsilon) \vec{U} = (\lambda_h + \gamma) \mathbb{M}_a^\varepsilon \underbrace{\mathbb{P}^\varepsilon \vec{U}}_{=\vec{U}}$$

ou bien

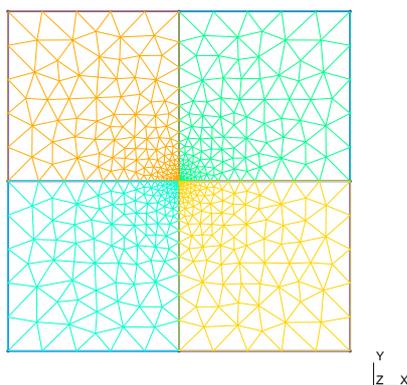
$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_a^\mu \vec{U} &= \lambda_h \mathbb{M}_a^\varepsilon \vec{U} \\
\mathbb{K}_a^\mu \mathbb{P}^\varepsilon \vec{E} &= \lambda_h \mathbb{M}_a^\varepsilon \mathbb{P}^\varepsilon \vec{E} \\
\mathbb{K}_a^\mu \vec{E} &= \lambda_h \mathbb{M}_a^\varepsilon \mathbb{P}^\varepsilon \vec{E}.
\end{aligned}$$

On utilise ici $\mathbb{P}^\varepsilon \vec{E} = \vec{U}$ et le fait que $\mathbb{K}_a^\mu \mathbb{G} \vec{\alpha} = 0$ ou la même chose $\mathbb{K}_a^\mu (\mathbb{I}_d - \mathbb{P}^\varepsilon) \vec{E} = 0$.

3.4 Tests numériques

Dans cette section on résout¹ le problème $(\mathbb{P}\mathbb{E}_\lambda^\gamma)$ avec $\gamma = 1$ en deux dimensions dans même géométrie damier comme dans le premier chapitre $\Omega =]-1, 1[^2 \subset \mathbb{R}^2$. On prends $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$ dans $\Omega_1 \cup \Omega_3$ et $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = \sigma^{-1}$ avec $\sigma > 1$ dans $\Omega_2 \cup \Omega_4$ et $\mu = 1$ dans tout Ω . On va utiliser les espaces discrets de type Raviart-Thomas de premier ordre \mathcal{R}_1 . De plus on utilise des maillages non-uniformes et raffinés au point $(0, 0)$. Ci-dessous on représente le maillage avec un pas $h = 0.2$ et $h = 0.01$ au point $(0, 0)$.

1. On utilise ici le logiciel Matlab



On prend $\sigma = 10$ et $\sigma = 100$ (ou $\varepsilon = 0.1$ et $\varepsilon = 0.01$). Dans ce cas la singularité du champ E est 0.39 et 0.127 respectivement, autrement dit $E \in \mathbf{H}^{0.39}(\Omega)$ et $E \in \mathbf{H}^{0.127}(\Omega)$. Ci-dessous dans les tableaux on représente dix premières valeurs propres non-nulles. Dans la première colonne on a les valeurs propres "exacte" λ , obtenues d'après le site web². Dans la deuxième colonne on a les valeurs propres λ_h du problème $(\mathbb{P}\mathbb{E}_\lambda^\gamma)$ avec l'opérateur de projection \mathbb{P}^ε et dans la troisième colonne on a l'erreur relative $\frac{|\lambda - \lambda_h|}{|\lambda|}$. Le nombre de degrés de liberté est égal à 1372 (ou $|\mathcal{E}_i| = 1372$). La dimension de l'espace ∇V_h^0 est égale à 445.

$\sigma = 10$ ($\mathbf{H}^{0.39}$)			$\sigma = 100$ ($\mathbf{H}^{0.127}$)		
λ	λ_h	$ \lambda - \lambda_h / \lambda $	λ	λ_h	$ \lambda - \lambda_h / \lambda $
4.534	4.542	1.854 ₋₃	4.893	4.906	2.663 ₋₃
6.25	6.116	2.153 ₋₂	7.207	7.238	4.403 ₋₃
7.037	7.065	4.031 ₋₃	15.537	10.48	3.255 ₋₁
22.342	22.258	3.738 ₋₃	24.462	24.415	1.949 ₋₃
22.679	22.741	2.744 ₋₃	24.487	24.598	4.517 ₋₃
26.095	26.064	1.208 ₋₃	27.757	27.879	4.391 ₋₃
26.509	26.666	5.914 ₋₃	29.647	27.971	5.651 ₋₂
40.488	40.514	6.461 ₋₄	44.249	44.398	3.361 ₋₃
42.651	42.697	1.090 ₋₃	44.435	44.525	2.028 ₋₃
55.882	55.332	9.845 ₋₃	63.596	63.058	8.462 ₋₃

Pour $\sigma = 10$ on voit que la deuxième valeur propre $\lambda_h = 6.116$ ($\lambda = 6.25$) a l'erreur 2% par rapport aux toutes les autres qui ont moins que 1% d'erreur. Pour $\sigma = 100$ on voit que la troisième valeur propre $\lambda_h = 10.48$ ($\lambda = 15.537$) a l'erreur 32.5%, dû à très forte singularité de la solution au point $(0, 0)$.

3.5 Résumé

La difficulté du problème aux valeurs propres des équations de Maxwell pour le champ électrique E est lié avec le fait que l'opérateur **rot** possède un noyau de dimension infinie. Dans ce cas les méthodes numériques habituelles nous donnent beaucoup de

2. <https://perso.univ-rennes1.fr/monique.dauge/core/index.html>

valeurs propres nulles associées aux gradients de noyau. Dans ce chapitre on a construit un opérateur de projection orthogonale sur le complément orthogonal du noyau. On a reformulé le problème aux valeurs propres stable en utilisant cet opérateur de projection orthogonale et on a supprimé toutes les valeurs propres nulles. Plus précisément on a les envoyé à l'infini. Cependant il reste un problème de l'inversion de la matrice de rigidité nodale \mathbb{K}_s^ε , présentant dans l'opérateur de projection $\mathbb{P}^\varepsilon = \mathbb{I}_d - \mathbb{G}(\mathbb{K}_s^\varepsilon)^{-1}\mathbb{G}^t\mathbb{M}_a^\varepsilon$, où on peut continuer l'étude sur ce problème.

Bibliographie

- [1] K. BRODT, « Comparaison de méthodes numériques pour résoudre les équations de maxwell en deux dimensions », 2014.
- [2] ———, « Comparaison de méthodes numériques pour résoudre les équations de maxwell en trois dimensions », 2015.
- [3] A. ERN et J.-L. GUERMOND, *Theory and practice of finite elements*, sér. Applied mathematical sciences. New York : Springer, 2004, ISBN : 0387205748. adresse : <http://opac.inria.fr/record=b1122090>.
- [4] É. BÉCACHE, P. CIARLET, C. HAZARD et E. LUNÉVILLE, *La Méthode des Eléments Finis : De la Théorie à la Pratique. II. Compléments*. Coll. Les Cours, Les Presses de l'ENSTA, 288 pages, nov. 2010.
- [5] P. CIARLET, H. WU et J. ZOU, « Edge element methods for maxwell's equations with strong convergence for gauss' laws », *SIAM J. Numer. Anal.*, t. 52, p. 779–807, 2014. DOI : 10.1137/120899856.
- [6] P. GRISVARD, *Singularities in boundary value problems*, sér. Recherches en mathématiques appliquées. Paris, Milan, Barcelone : Masson Berlin Heidelberg New York, 1992, ISBN : 3540554505. adresse : <http://opac.inria.fr/record=b1076896>.
- [7] P. CIARLET et E. LUNÉVILLE, *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique. I. Concepts généraux*, sér. Les Cours. Paris : Les Presses de l'ENSTA, 2009, ENSTA : École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, ISBN : 9782722509177. adresse : <http://opac.inria.fr/record=b1130797>.
- [8] F. HECHT, « New development in freefem++ », *J. Numer. Math.*, t. 20, n° 3-4, p. 251–265, 2012, ISSN : 1570-2820.
- [9] P. CIARLET, « Notes de cours sur les équations de maxwell », 2014.
- [10] F. RAPETTI et A. BOSSAVIT, « Whitney forms of higher degree », *SIAM Journal on Numerical Analysis*, t. 47, n° 3, p. 2369–2386, juin 2009. DOI : 10.1137/070705489. adresse : <https://hal-supelec.archives-ouvertes.fr/hal-00763881>.